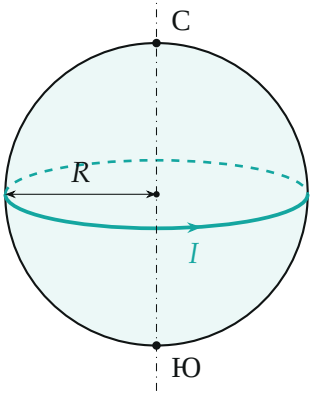
Ток вдоль экватора

Задача 5. [Курчатов 2015/16, 11 класс, задача 5] В фантастическом фильме описали геофизический эксперимент. Вдоль экватора проложили толстый проводник и по нему пропустили такой ток, что магнитное поле вблизи полюсов Земли стало равным нулю. Найдите силу этого тока. Индукция магнитного поля Земли над полюсами равна $6 \cdot 10^{-5}$ Тл. Радиус Земли 6370 км. Магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.



Поясняющий рисунок: ток I по экватору; полюсы — на оси кольца на расстоянии R от центра.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на закон Био — Савара — Лапласа: поле кругового тока на его оси. Проводник вдоль экватора — кольцо радиусом R (радиус Земли), а полюсы лежат на оси этого кольца на расстоянии R от центра. Ток подбирают так, чтобы поле кольца на полюсе было равно по модулю и противоположно полю Земли. Поле кольца на оси находим, складывая вклады малых участков: по симметрии остаются только их проекции на ось.

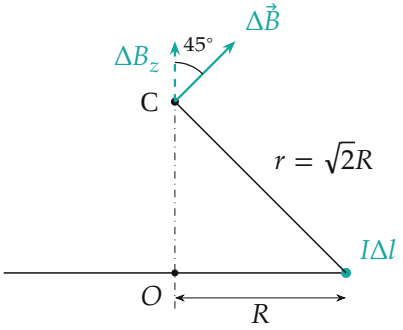
Обозначения. $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ м — радиус кольца (Земли); $B_0 = 6 \cdot 10^{-5}$ Тл — поле Земли над полюсом; I — искомый ток; Δl — длина малого участка кольца; r — расстояние от участка до полюса; $\Delta\vec{B}$ — его вклад в поле; ось z — ось Земли.

1. Вклад малого участка: закон Био — Савара — Лапласа. Участок Δl с током I создаёт в точке на расстоянии r поле

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I\,\Delta l\,\sin\beta}{r^2},$$

где β — угол между участком и направлением на точку. Участок кольца направлен по касательной, а направление на полюс лежит в плоскости, содержащей ось, — они перпендикулярны, $\sin\beta = 1$. Расстояние до полюса (рисунок 2): $r = \sqrt{R^2 + R^2} = \sqrt{2}\,R$. Значит,

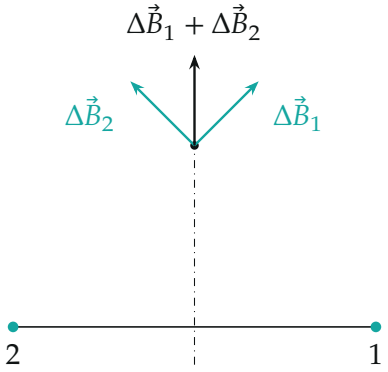
$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I\,\Delta l}{2R^2}.$$



Сечение плоскостью, содержащей ось: участок Δl (ток перпендикулярен листу) создаёт на полюсе вклад $\Delta\vec{B} \perp \vec{r}$, под углом 45° к оси.

2. Направление вклада и сложение. Вектор $\Delta\vec{B}$ перпендикулярен и участку, и отрезку r, то есть лежит в плоскости рисунка 2 под прямым углом к r. Отрезок r наклонён к оси под 45°, значит, и $\Delta\vec{B}$ наклонён к оси под 45°. Его поперечные составляющие от противоположных участков кольца гасят друг друга (рисунок 3), а проекции на ось складываются:

$$B = \sum \Delta B\cos 45^\circ = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I}{2R^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\sum \Delta l = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I\cdot 2\pi R}{2\sqrt{2}\,R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\sqrt{2}\,R}.$$



Вклады диаметрально противоположных участков 1 *и* 2*: поперечные составляющие гасятся, сумма направлена по оси.*

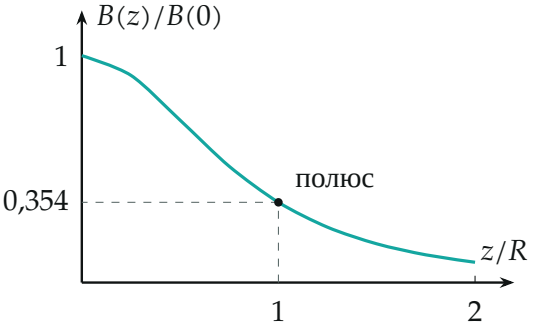
3. Условие задачи: поле кольца компенсирует поле Земли. Поле кольца на полюсе должно быть равно B_0 по модулю и направлено противоположно полю Земли. Поле кольца на оси направлено одинаково над обоими полюсами (вдоль оси), и поле Земли над северным и южным полюсами тоже направлено вдоль оси в одну сторону (у диполя), так что при подходящем направлении тока оно гасится сразу над обоими полюсами:

$$\frac{\mu_0 I}{4\sqrt{2}\,R} = B_0 \quad \Longrightarrow \quad I = \frac{4\sqrt{2}\,B_0 R}{\mu_0}.$$

Значения:

$$I = \frac{4 \cdot 1{,}414 \cdot 6 \cdot 10^{-5} \cdot 6{,}37 \cdot 10^6}{4\pi \cdot 10^{-7}}\ \text{А} \approx 1{,}7 \cdot 10^9\ \text{А}.$$

4. Второй способ: общая формула поля на оси. Для точки на расстоянии z от центра на оси кольца тем же сложением получаем $B(z) = \dfrac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}}$. При $z = R$: $B = \dfrac{\mu_0 I R^2}{2 \cdot 2\sqrt{2}\,R^3} = \dfrac{\mu_0 I}{4\sqrt{2}\,R}$ — то же самое. Поле на полюсе в $2\sqrt{2} \approx 2{,}83$ раза слабее, чем в центре кольца (рисунок 4), поэтому ток нужен такой большой.



Поле кольца на оси по точкам $B(z)/B(0) = (1 + z^2/R^2)^{-3/2}$*; на полюсе* $(z = R)$ *оно составляет* $1/(2\sqrt{2}) \approx 0{,}354$ *от поля в центре.*

Обратите внимание. Расстояние от проводника до полюса — не R, а $\sqrt{2}\,R$, и складывать надо не модули вкладов, а их проекции на ось (множитель $\cos 45°$). Пропуск любого из этих множителей меняет ответ в 2 или $\sqrt{2}$ раз.

Ответ:

$$I = \frac{4\sqrt{2}\,B_0 R}{\mu_0} \approx 1{,}7 \cdot 10^9 \text{ А}.$$

Проверка. Размерность: Тл·м/(Гн/м) = Тл·м^2/Гн = Вб/Гн = А. Предел: при $z \to 0$ общая формула даёт известное поле в центре витка $\mu_0 I/(2R)$. python: $I = 1{,}7205 \cdot 10^9$ А.

Ответ. $I = \dfrac{4\sqrt{2}\,B_0 R}{\mu_0} = \dfrac{8B_0 R}{\sqrt{2}\,\mu_0} \approx 1{,}7 \cdot 10^9$ А.