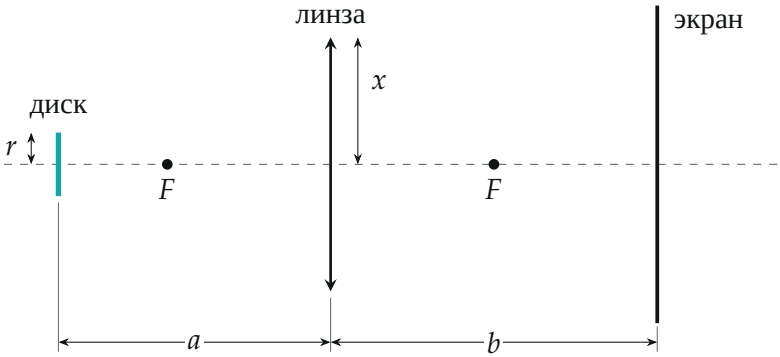
Световое пятно за линзой

Задача 6. [Курчатов 2015/16, 11 класс, задача 6] На расстоянии $a = 10$ см от тонкой собирающей линзы находится светящийся диск радиусом $r = 1$ см, причём плоскость диска перпендикулярна главной оптической оси линзы, а его центр лежит на этой оси. За линзой на расстоянии $b = 12$ см от неё находится непрозрачный экран, параллельный линзе. Определите радиус светового пятна на экране, если фокусное расстояние линзы $f = 6$ см, а радиус линзы $x = 4$ см.



Поясняющий рисунок к условию (масштаб по вертикали крупнее, чем по горизонтали).

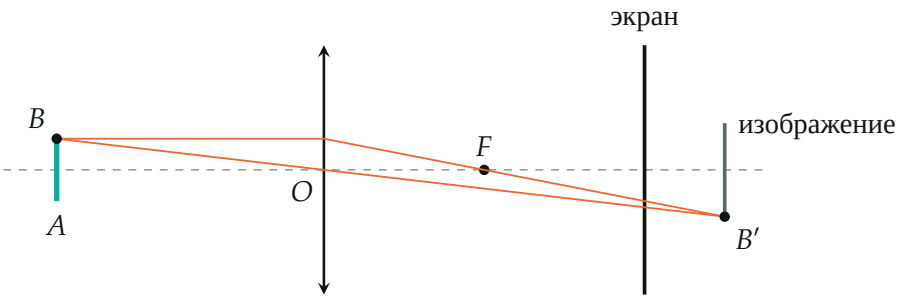
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на построение хода лучей в тонкой линзе. Каждая точка диска посылает на линзу конус лучей; линза собирает его в изображение этой точки. Изображение диска лежит дальше экрана, поэтому экран перехватывает каждый конус «не доходя» до вершины и на экране получается не точка, а кружок. Пятно — объединение всех таких кружков; его край даёт луч, который идёт от одного края диска через противоположный край линзы.

Обозначения. Ось z — главная оптическая ось, начало — в центре линзы O; y — высота точки над осью. v — расстояние от линзы до изображения диска; Γ — увеличение; y_0 — высота светящейся точки диска ($-r \le y_0 \le r$); u — высота точки линзы, через которую прошёл луч ($-x \le u \le x$); R — искомый радиус пятна.

1. Где изображение диска. Формула тонкой собирающей линзы для действительного изображения:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{v}=\frac{1}{f} \quad\Longrightarrow\quad v=\frac{af}{a-f}=\frac{10\cdot 6}{10-6}\text{ см}=15\text{ см}>b.$$

Увеличение $\Gamma=v/a=1{,}5$: изображение точки высотой y_0 лежит на высоте $-\Gamma y_0$ (изображение перевёрнутое). Построение для верхнего края диска B — на рисунке 2: луч через центр линзы не преломляется, луч, параллельный оси, проходит через задний фокус; они пересекаются в B' на расстоянии $v=15$ см.



Изображение диска строим по двум «удобным» лучам: оно на 15 см за линзой, за экраном.

2. Где луч пересекает экран. Луч из точки y_0 диска, попавший в точку u линзы, после линзы идёт к изображению $(v;\,-\Gamma y_0)$. На прямой между точками $(0;\,u)$ и $(v;\,-\Gamma y_0)$ при $z=b$ высота равна

$$y=u+\frac{b}{v}\,(-\Gamma y_0-u)=u\left(1-\frac{b}{v}\right)-\frac{b}{a}\,y_0,$$

так как $\Gamma b/v=b/a$. Числа: $1-b/v=1-12/15=0{,}2$, $b/a=1{,}2$:

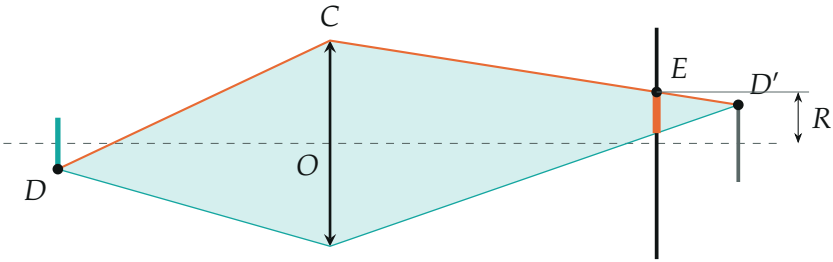
$$y=0{,}2\,u-1{,}2\,y_0.$$

3. Край пятна. Модуль y наибольший, когда оба слагаемых одного знака и максимальны по модулю: $u=x$ и $y_0=-r$ (или наоборот $u=-x$,

$y_0 = r$). Это луч из нижнего края диска через верхний край линзы — рисунок 3:

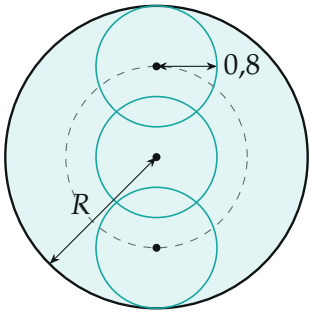
$$R = x\left(1 - \frac{b}{v}\right) + \frac{b}{a}r = 0{,}2 \cdot 4 \text{ см} + 1{,}2 \cdot 1 \text{ см} = 2 \text{ см}.$$

Весь конус из нижнего края диска собирается в точку D' на высоте $+1{,}5$ см и на экране занимает отрезок от $0{,}2 \cdot (-4) + 1{,}2 = 0{,}4$ см до 2 см.



Конус лучей из края диска D сходится в D', экран режет его раньше; край пятна E даёт луч DC.

4. Пятно — объединение кружков. Для одной точки диска y_0 все лучи (вся линза, $|u| \le x$) дают на экране кружок радиусом $0{,}2x = 0{,}8$ см с центром на высоте $-1{,}2y_0$. Центры кружков лежат в круге радиусом $1{,}2r = 1{,}2$ см (изображение диска «на экране» по центральным лучам). Объединение — круг радиусом $1{,}2 + 0{,}8 = 2$ см (рисунок 4).



Вид экрана: кружки радиусом 0,8 см от разных точек диска; их центры — внутри штрихового круга радиусом 1,2 см.

5. Второй способ — через фокальную плоскость. Луч DC идёт вверх с наклоном $\frac{x+r}{a} = \frac{5}{10} = 0{,}5$. Вспомогательный луч, параллельный ему, через центр линзы проходит без преломления и пересекает заднюю фокальную плоскость на высоте $f \cdot 0{,}5 = 3$ см. Параллельные лучи собираются в одной точке фокальной плоскости, поэтому преломлённый луч DC идёт из C (высота 4 см) в точку ($z = 6$ см, высота 3 см): на каждые 6 см вдоль оси он опускается на 1 см. На экране, при $z = 12$ см, его высота $4 - 2 = 2$ см. Ответ тот же.

Обратите внимание. Край пятна даёт не луч из верхнего края диска через верхний край линзы, а «перекрёстный» луч: нижний край диска — верхний край линзы. Изображение перевёрнуто и лежит за экраном, поэтому лучи из нижней точки диска уходят вверх.

Ответ:

$$R = x\left(1 - \frac{b(a-f)}{af}\right) + \frac{b}{a}r = 2 \text{ см}.$$

Проверка. Размерность — сантиметры. Предел: экран точно в плоскости изображения ($b = v$) — первое слагаемое исчезает, пятно — резкое изображение радиусом $\Gamma r = 1{,}5$ см, как и должно быть. Точечный источник ($r = 0$) — пятно радиусом $x(1 - b/v)$, это просто сечение сходящегося конуса.

Ответ. Радиус светового пятна $R = 2$ см.