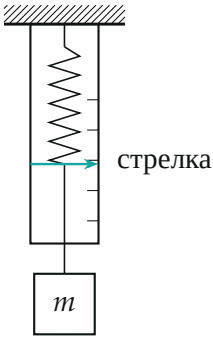
Неисправный динамометр

Задача 1. [Курчатов 2015/16, 7 класс, задача 1] Из-за долгого использования школьный динамометр стал давать неправильные показания, хотя для его пружины всё ещё оставался справедливым закон Гука. Когда к динамометру подвесили груз массой 200 г, динамометр показал 3,0 Н, а когда подвесили груз массой 350 г, динамометр показал 4,8 Н. Найдите показания этого динамометра, если к нему подвесить груз массой 300 г.



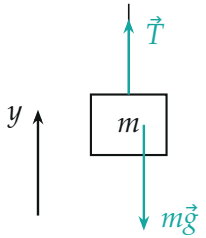
Поясняющий рисунок: динамометр с подвешенным грузом.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на закон Гука и линейную зависимость. Пружина по-прежнему растягивается пропорционально силе, а сила, с которой груз тянет крючок, пропорциональна массе груза. Значит, удлинение пружины пропорционально массе. Показания же не пропорциональны массе: $3{,}0/0{,}2 = 15$ Н/кг, а $4{,}8/0{,}35 \approx 13{,}7$ Н/кг. Так бывает, если у прибора сбит ноль и, возможно, растянута шкала. Тогда показание — линейная функция массы, и две точки однозначно её задают.

Обозначения. m — масса груза; F — показание динамометра; $m_1 = 0{,}2$ кг, $F_1 = 3{,}0$ Н; $m_2 = 0{,}35$ кг, $F_2 = 4{,}8$ Н; $m_3 = 0{,}3$ кг, F_3 — искомое показание; A, B — коэффициенты зависимости; T — сила натяжения крючка (рисунок 2).

1. Груз в равновесии: сила, растягивающая пружину. На груз действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила $\vec{T}$ со стороны крючка (рисунок 2). Груз покоится, второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось: $T -$

$mg = 0$, то есть $T = mg$. По третьему закону Ньютона груз тянет крючок вниз с той же силой mg.



Силы, действующие на груз; ось y вверх.

2. Закон Гука: удлинение пропорционально массе. По закону Гука удлинение пружины $x = T/k = mg/k$, где k — жёсткость. Стрелка сдвигается на x от своего положения без груза. Шкала прибора отградуирована как-то неправильно: деление «0» стоит не там, где стрелка без груза, а расстояние между делениями может отличаться от верного. При любой такой ошибке показание линейно зависит от положения стрелки, а значит, и от массы:

$$F = A + Bm.$$

Здесь A — показание без груза (сбитый ноль), B — сколько ньютонов «показывает» прибор на каждый килограмм.

3. Коэффициенты по двум измерениям. Подставляем оба опыта:

$$\begin{cases} F_1 = A + Bm_1, \\ F_2 = A + Bm_2. \end{cases}$$

Вычитаем из второго уравнения первое — A уходит:

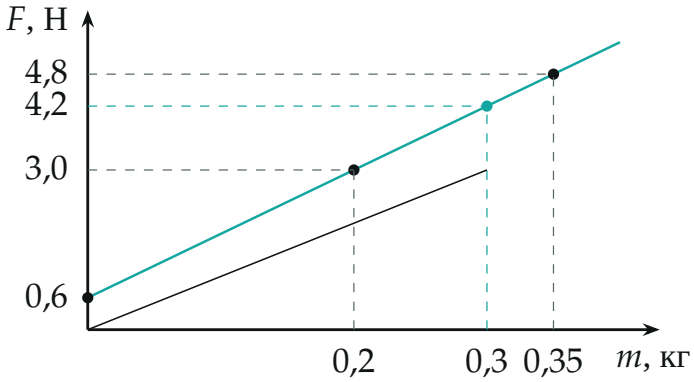
$$B = \frac{F_2 - F_1}{m_2 - m_1} = \frac{4{,}8 - 3{,}0}{0{,}35 - 0{,}2}\ \frac{\text{Н}}{\text{кг}} = 12\ \frac{\text{Н}}{\text{кг}},$$

$$A = F_1 - Bm_1 = 3{,}0\ \text{Н} - 12 \cdot 0{,}2\ \text{Н} = 0{,}6\ \text{Н}.$$

Прибор без груза показывает 0,6 Н, а прибавку веса завышает: 12 Н/кг вместо $g \approx 10$ Н/кг.

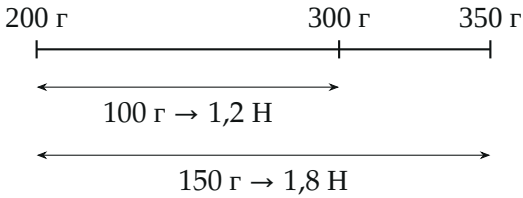
4. Показание для груза 300 г.

$$F_3 = A + Bm_3 = 0{,}6\ \text{Н} + 12 \cdot 0{,}3\ \text{Н} = 4{,}2\ \text{Н}.$$



Показание неисправного динамометра — прямая через две измеренные точки; при $m = 0$ она отсекает 0,6 Н. Тонкая линия — исправный прибор, $F = gm$.

5. Второй способ: пропорция по приращениям. Прибавка массы на 150 г дала прибавку показания 1,8 Н. Груз 300 г тяжелее первого на 100 г, то есть прибавка показания в $100/150 = 2/3$ раза меньше: $\frac{2}{3} \cdot 1{,}8\ \text{Н} = 1{,}2\ \text{Н}$. Показание $3{,}0 + 1{,}2 = 4{,}2$ Н — совпадает.



Приращение показания пропорционально приращению массы: сбитый ноль в разность не входит.

Обратите внимание. Нельзя считать показание пропорциональным массе и делить 3,0 Н на 200 г: так получились бы разные ответы (4,5 Н по первому опыту и $\approx$ 4,1 Н по второму). Пропорционально массе только *приращение* показания.

Ответ: $F_3 = F_1 + \dfrac{F_2 - F_1}{m_2 - m_1}(m_3 - m_1) = 4{,}2$ Н.

Проверка. Размерность: дробь — Н/кг, умноженная на кг, даёт ньютоны. Значение лежит между 3,0 и 4,8 Н, как и масса 300 г — между 200 и 350 г. python: $A = 0{,}6$ Н, $B = 12$ Н/кг, $F_3 = 4{,}2$ Н.

Ответ. 4,2 Н.