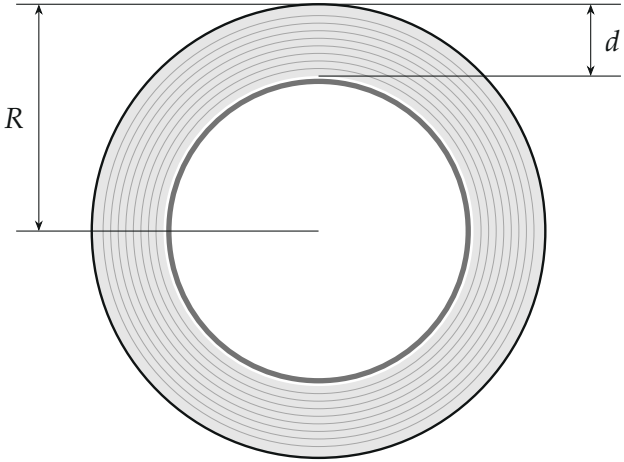
Рулон скотча

Задача 2. [Курчатов 2015/16, 7 класс, задача 2] Внешний радиус рулона клейкой ленты (скотча) равен $R = 60$ мм, а толщина рулона $d = 19$ мм (см. рис.). Длина ленты в рулоне $L = 150$ м. Пользуясь этими данными, как можно точнее определите:

1. количество слоёв в рулоне,
2. толщину одного слоя.

Примечание: длина l окружности находится по формуле $l = 2\pi r$, где r — радиус окружности, $\pi \approx 3{,}141593$.

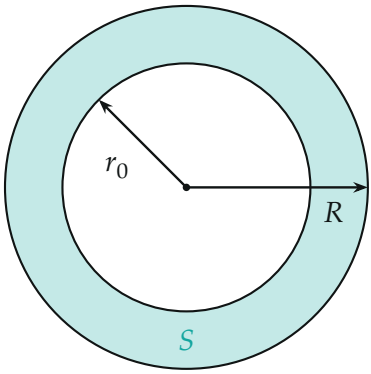


▲ **Решение. Что происходит.** Это задача-оценка на сохранение объёма (здесь — площади торца). Лента, намотанная в рулон, занимает кольцо между радиусами $R - d$ и R. Если её размотать, получится длинная полоска длиной L и толщиной x. Площадь торца при перемотке не меняется: кольцо на торце рулона и сечение размотанной ленты — это одна и та же лента. Отсюда толщина слоя, а число слоёв — толщина рулона, делённая на толщину слоя.

Обозначения. x — толщина одного слоя; N — число слоёв; $r_0 = R - d = 41$ мм — внутренний радиус намотки; h — ширина ленты (она сократится); r — радиус отдельного слоя.

1. Площадь кольца на торце рулона. Торец рулона — кольцо между окружностями радиусов $r_0 = R - d$ и R (рисунок 2). Его площадь — разность площадей двух кругов:

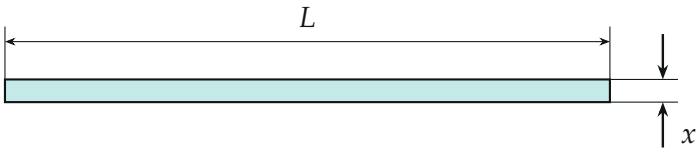
$$S = \pi R^2 - \pi (R - d)^2 = \pi\,(2Rd - d^2).$$



Торец рулона: лента занимает кольцо площадью S между радиусами $r_0 = R - d$ и R.

2. Размотанная лента: та же площадь. Размотаем рулон. Получится полоска длиной L и толщиной x (рисунок 3), её объём hxL. В рулоне та же лента занимает объём hS. Объём ленты при перемотке не меняется, ширина h одинакова, поэтому

$$xL = S = \pi\,(2Rd - d^2) \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{\pi\,(2Rd - d^2)}{L}.$$



Размотанная лента: торец — полоска $L \times x$ той же площади S (толщина сильно преувеличена).

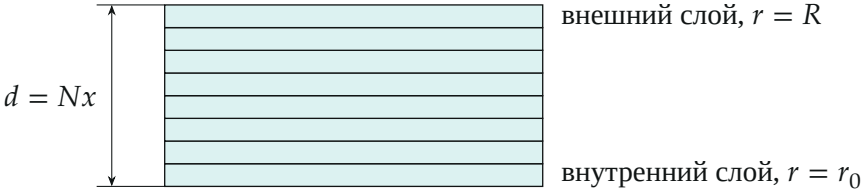
Значения (всё в миллиметрах, $L = 150\,000$ мм):

$$2Rd - d^2 = 2 \cdot 60 \cdot 19 - 19^2 = 2280 - 361 = 1919 \text{ мм}^2,$$

$$x = \frac{3{,}141593 \cdot 1919}{150\,000} \text{ мм} \approx 0{,}0402 \text{ мм} \approx 40 \text{ мкм}.$$

3. Число слоёв. Слои лежат друг на друге вплотную, и их суммарная толщина равна толщине рулона d (рисунок 4):

$$N = \frac{d}{x} = \frac{dL}{\pi\,(2Rd - d^2)} = \frac{L}{\pi\,(2R - d)} = \frac{150\,000}{3{,}141593 \cdot 101} \approx 472{,}7 \approx 473.$$



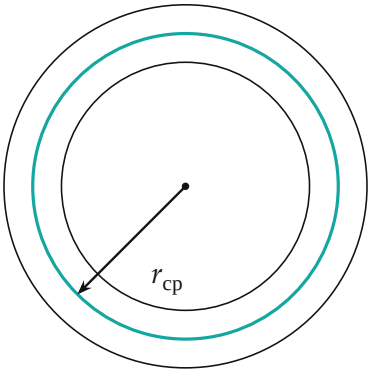
Разрез стенки рулона: N слоёв толщиной x складываются в толщину d.

4. Второй способ: средний радиус слоя. Слой радиуса r — это виток длиной $2\pi r$. Радиусы витков равномерно растут от $r_0 = R - d$ до R, поэтому сумма длин всех N витков равна N, умноженному на длину витка среднего радиуса:

$$r_{\text{ср}} = \frac{(R - d) + R}{2} = R - \frac{d}{2} = 50{,}5 \text{ мм}, \qquad L = N \cdot 2\pi r_{\text{ср}},$$

$$N = \frac{L}{2\pi r_{\text{ср}}} = \frac{150\,000}{2 \cdot 3{,}141593 \cdot 50{,}5} \approx 472{,}7, \qquad x = \frac{d}{N} \approx 0{,}0402 \text{ мм}.$$

Формула $L/(2\pi r_{\text{ср}}) = L/(\pi(2R - d))$ — в точности та же, что в п. 3: оба способа дают одно и то же число.



Виток среднего радиуса $r_{ср} = R - d/2$ (бирюзовый): его длина равна средней длине витка.

Обратите внимание. У организаторов в ответе $N \approx 475$ по первому способу — это следствие округления x до 40 мкм перед делением: $19/0{,}040 = 475$. Без промежуточного округления оба способа дают $N \approx 473$.

Ответ:

$$N = \frac{L}{\pi\,(2R - d)} \approx 473, \qquad x = \frac{\pi\,(2Rd - d^2)}{L} \approx 40 \text{ мкм}.$$

Проверка. Размерности: x — мм^2/мм = мм, N — мм/мм, безразмерно. Правдоподобие: обычная лента скотча толщиной несколько десятков микрометров. Длина витка среднего радиуса $\approx 0{,}317$ м, а $473 \cdot 0{,}317$ м $\approx$ 150 м. python: $x = 0{,}040191$ мм, $N = 472{,}74$ обоими способами.

Ответ. 1) $N = \dfrac{L}{\pi(2R - d)} \approx 473$; 2) $x = \dfrac{\pi(2Rd - d^2)}{L} \approx 40$ мкм.