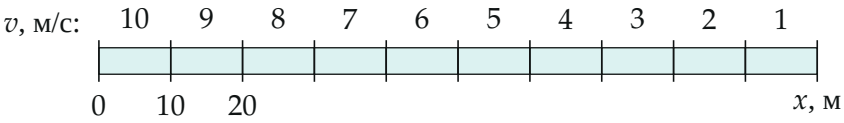
Спортсмен с убывающей скоростью

Задача 3. [Курчатов 2015/16, 7 класс, задача 3] Спортсмен начал забег по прямой и первые 10 м бежал со скоростью 10 м/с, следующие 10 м — со скоростью 9 м/с, следующие 10 м — со скоростью 8 м/с, и так далее… Какое расстояние S он пробежал к тому моменту, когда остановился? Сколько времени длился забег до остановки? С какой средней скоростью он пробежал первую половину дистанции $S/2$? Какое расстояние он пробежал за первую половину времени забега?



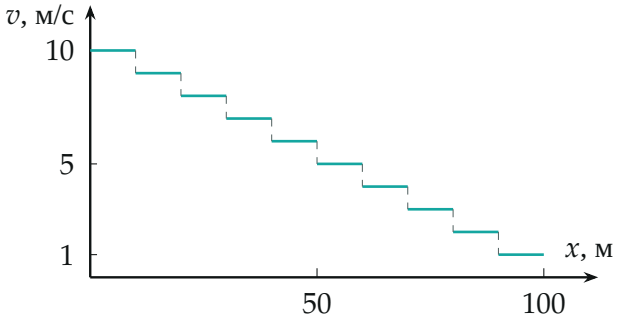
Поясняющий рисунок: дистанция разбита на участки по 10 м, над каждым — скорость на нём.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на равномерное движение по участкам и определение средней скорости. На каждом 10-метровом участке скорость постоянна, поэтому время участка — его длина, делённая на скорость. Скорость падает на 1 м/с за участок, значит, участков ровно столько, сколько раз 1 м/с укладывается в 10 м/с. Средняя скорость — весь путь, делённый на всё время (а не среднее скоростей). «Половина пути» и «половина времени» — разные моменты: медленные последние участки занимают большую часть времени.

Обозначения. $l = 10$ м — длина участка; $v_k = (11 - k)$ м/с — скорость на k-м участке, $k = 1, \dots, 10$; $t_k = l/v_k$ — время k-го участка; T — время всего забега; t_1 — время первой половины дистанции; v_1 — средняя скорость на ней; s_2 — путь за время $T/2$.

1. Длина дистанции. Скорость на участках: $10, 9, \dots, 1$ м/с — это 10 участков; после десятого скорость стала бы нулевой, спортсмен остановился (рисунок 2). Путь

$$S = 10\,l = 10 \cdot 10\text{ м} = 100\text{ м}.$$



Скорость в зависимости от координаты: ступеньки по 10 м, каждая на 1 м/с ниже предыдущей.

2. Время забега. Движение на каждом участке равномерное, время участка $t_k = l/v_k$. Время забега — сумма времён всех участков:

$$T = \frac{l}{v_1} + \frac{l}{v_2} + \cdots + \frac{l}{v_{10}},$$

$$T = 10\text{ м} \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2} + 1\right) \frac{\text{с}}{\text{м}} \approx 29{,}3\text{ с}.$$

Времена участков в секундах: первые пять — 1,00; 1,11; 1,25; 1,43; 1,67, последние пять — 2,00; 2,50; 3,33; 5,00; 10,00. Последние два участка — 20 м из 100 — занимают больше половины всего времени.

3. Средняя скорость на первой половине дистанции. Первая половина дистанции $S/2 = 50$ м — это первые пять участков со скоростями от 10 до 6 м/с:

$$t_1 = 10\text{ м} \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{7} + \frac{1}{6}\right) \frac{\text{с}}{\text{м}} \approx 6{,}46\text{ с}.$$

По определению средняя скорость — весь путь на этом отрезке, делённый на всё время:

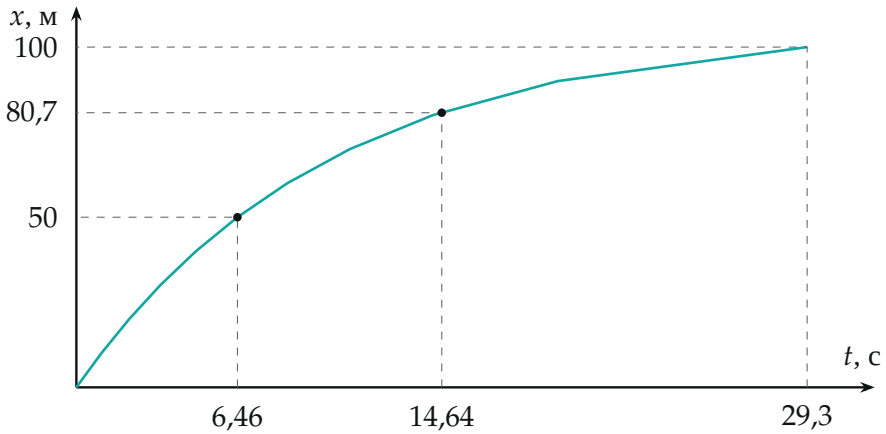
$$v_1 = \frac{S/2}{t_1} = \frac{50\text{ м}}{6{,}456\text{ с}} \approx 7{,}74\text{ м/с}.$$

Это не среднее арифметическое $(10 + 9 + 8 + 7 + 6)/5 = 8$ м/с: на

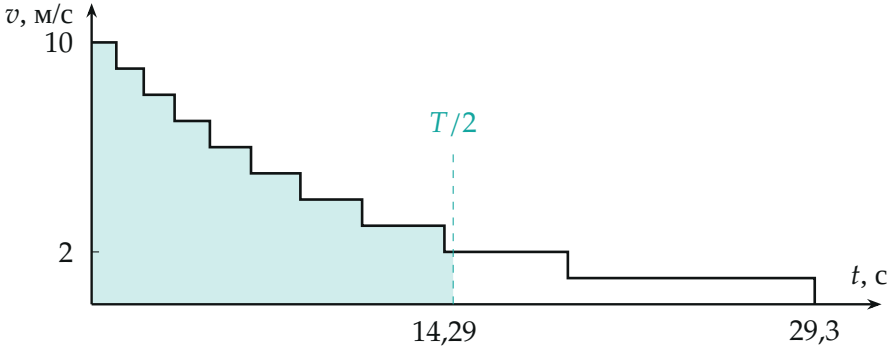
медленных участках спортсмен проводит больше времени, и они весят больше.

4. Путь за первую половину времени. Половина времени забега $T/2 \approx 14{,}64$ с. Накопленное время к концу каждого участка: после восьмого (80 м) — 14,29 с, после девятого (90 м) — 19,29 с. Значит, момент $T/2$ приходится на девятый участок, где скорость 2 м/с (рисунки 3 и 4). За оставшееся время $T/2 - 14{,}29$ с спортсмен пробегает ещё $2\ \text{м/с} \cdot (T/2 - 14{,}29\ \text{с})$:

$$s_2 = 80\ \text{м} + 2\ \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot (14{,}645 - 14{,}290)\ \text{с} \approx 80{,}7\ \text{м}.$$



Координата спортсмена от времени (ломаная по вычисленным точкам): половина пути пройдена за 6,46 с, а за половину времени — 80,7 м.



Скорость от времени. Путь — площадь под графиком; закрашено то, что пройдено к моменту $T/2$: восемь полных ступенек (80 м) и узкая полоска высотой 2 м/с.

Обратите внимание. Средняя скорость на первой половине пути (7,74 м/с) ниже средней из пяти скоростей и сильно выше средней на всей дистанции ($100/29{,}3 \approx 3{,}4$ м/с): последний участок со скоростью 1 м/с один занимает треть всего времени.

Ответ: $S = 100$ м; $T \approx 29{,}3$ с; $v_1 \approx 7{,}74$ м/с; $s_2 \approx 80{,}7$ м.

Проверка. Размерности: м/(м/с) = с. Прикидка: путь за половину времени должен быть больше половины пути, ведь сначала спортсмен бежит быстрее, — $80{,}7 > 50$ м, верно; и $t_1 = 6{,}46$ с $< T/2$. python: $T = 29{,}290$ с, $t_1 = 6{,}456$ с, $v_1 = 7{,}745$ м/с, $s_2 = 80{,}71$ м.

Ответ. $S = 100$ м; $T \approx 29{,}3$ с; средняя скорость на первой половине дистанции $\approx 7{,}74$ м/с; за первую половину времени — $\approx 80{,}7$ м.