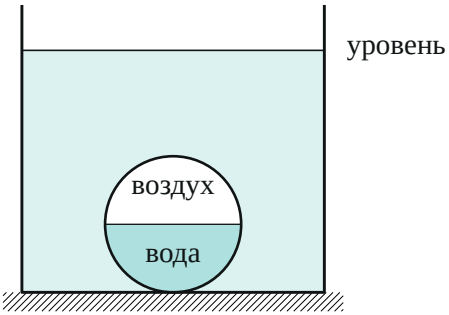
Капсула, всплывающая в сосуде

Задача 4. [Курчатов 2015/16, 7 класс, задача 4] Полая тонкостенная металлическая капсула в форме шара лежит на дне цилиндрического сосуда с площадью дна $S = 5$ м^2. Капсула наполовину заполнена водой, а наполовину — воздухом. Масса оболочки капсулы равна $M = 2$ т, а масса воды в ней — $m = 1{,}5$ т. С помощью лёгкого насоса, встроенного в корпус капсулы, вода переливается из неё в сосуд, и капсула всплывает. На сколько изменится (поднимется или опустится) уровень воды в сосуде в этом процессе (считая от момента, когда вся вода ещё находится в капсуле, и до момента, когда капсула плавает опустошённая)? Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3.



Поясняющий рисунок: капсула лежит на дне, внутри — поровну воды и воздуха.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на закон Архимеда и сохранение объёма воды. Уровень воды в сосуде задаёт сумма двух объёмов: воды, налитой в сам сосуд, и погружённой части капсулы. Вода капсулы, пока она внутри, уровень сосуда «не видит» — он видит только объём шара. Насос переносит воду из капсулы в сосуд, а капсула всплывает и погружена уже не целиком. Сравним два состояния.

Обозначения. V — объём капсулы; W — объём воды в сосуде вне капсулы в начале; $V_{\text{п}}$ — объём погружённой части пустой капсулы в конце; h_1, h_2 — уровни воды в начале и в конце; $\Delta h = h_2 - h_1$.

1. Объём капсулы. Вода массой m занимает половину капсулы:

$$\frac{V}{2} = \frac{m}{\rho} \quad \Longrightarrow \quad V = \frac{2m}{\rho} = \frac{2 \cdot 1500}{1000}\ \text{м}^3 = 3\ \text{м}^3.$$

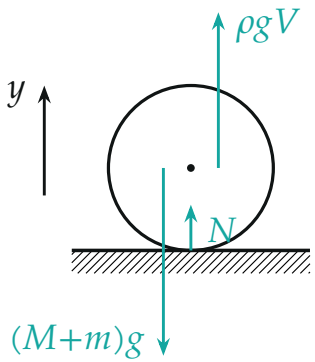
2. Начало: капсула целиком под водой. Проверим, что капсула действительно лежит на дне. На неё действуют сила тяжести $(M+m)g$, сила Архимеда $\rho g V$ и сила реакции дна N (рисунок 2). Второй закон Ньютона для покоящейся капсулы в проекции на вертикальную ось вверх:

$$N + \rho g V - (M + m)g = 0$$

$$N = (M + m - \rho V)g = (3{,}5 - 3) \cdot 10^3 g > 0.$$

Реакция положительна — капсула прижата ко дну, погружена целиком. Объём под уровнем воды равен $W + V$:

$$h_1 S = W + V.$$



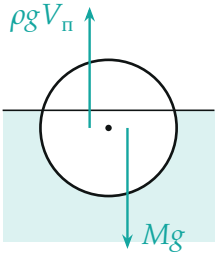
Капсула в начале: силы Архимеда не хватает, дно подпирает её силой N.

3. Конец: пустая капсула плавает. Теперь вода из капсулы ($m/\rho = 1{,}5\ \text{м}^3$) налита в сосуд. Капсула плавает и покоится: сила Архимеда уравновешивает силу тяжести оболочки (рисунок 3):

$$\rho g V_\text{п} - Mg = 0 \quad \Longrightarrow \quad V_\text{п} = \frac{M}{\rho} = 2\ \text{м}^3 < V.$$

Объём под уровнем воды:

$$h_2 S = W + \frac{m}{\rho} + V_{\text{п}} = W + \frac{m}{\rho} + \frac{M}{\rho}.$$



Пустая капсула плавает: погружено две трети её объёма ($V_n = 2$ м^3 из 3 м^3).

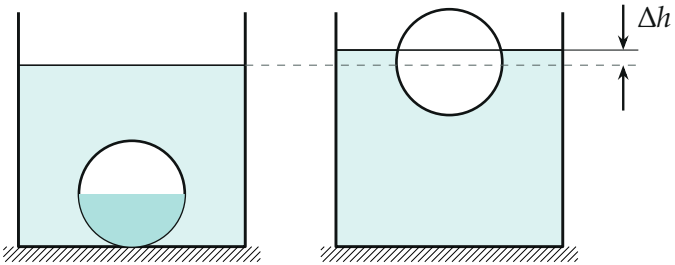
4. Изменение уровня. Вычитаем из уравнения для конца уравнение для начала — неизвестный объём W сокращается:

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{1}{S}\left(\frac{m}{\rho} + \frac{M}{\rho} - V\right) = \frac{M + m - 2m}{\rho S} = \frac{M - m}{\rho S}.$$

Значения:

$$\Delta h = \frac{2000 - 1500}{1000 \cdot 5}\ \text{м} = 0{,}1\ \text{м} = 10\ \text{см}.$$

Знак плюс — уровень поднимается: из капсулы вышло 1,5 м^3 воды, а погружённый объём капсулы уменьшился всего на 1 м^3 (рисунок 4).



Сосуд до и после (масштаб по высоте условный): уровень поднялся на Δh.

Обратите внимание. Вода внутри лежащей капсулы в объём «под уровнем» не добавляется отдельно: она уже внутри шара объёмом V. Если сложить $W + V + m/\rho$, вода капсулы будет посчитана дважды.

Ответ:

$$\Delta h = \frac{M - m}{\rho S} = 10 \text{ см (уровень поднимется).}$$

Проверка. Размерность: кг/(кг/м^3·м^2) = м. Предельный случай: если бы оболочка весила столько же, сколько вода в ней ($M = m$), пустая капсула вытесняла бы ровно столько, сколько из неё вылили, и при $V = 2m/\rho$ уровень не изменился бы — формула даёт 0. Второй способ через массы: в начале вода и капсула вытесняют объём $V = 3$ м^3, в конце вытесняется $M/\rho = 2$ м^3, а воды «снаружи» стало больше на 1,5 м^3; итог $+0{,}5$ м^3, делим на 5 м^2 — 0,1 м.

Ответ. Уровень воды поднимется на $\Delta h = \dfrac{M - m}{\rho S} = 10$ см.