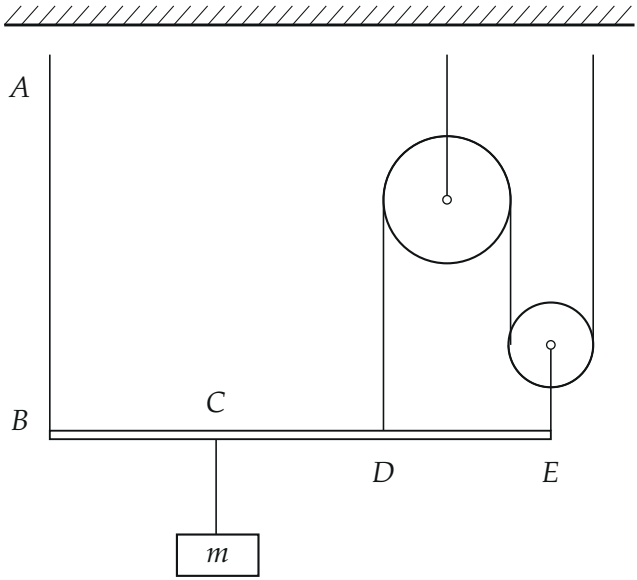
Стержень, блоки и нити

Задача 2. [Курчатов 2015/16, 8 класс, задача 2] К лёгкому стержню BE подвешен груз массой $m = 6$ кг. Стержень удерживается системой идеальных блоков и нитей. Вся система находится в равновесии. Найдите силу натяжения нити AB. Точки C и D делят стержень на три равные части. Модуль ускорения свободного падения считайте равным $g = 10$ м/с^2.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие рычага с блоками. Стержень лёгкий и неподвижен — для него выполняются два условия равновесия: сумма сил равна нулю и сумма моментов равна нулю. Блоки идеальные, нить, огибающая оба блока, одна — натяжение по всей её длине одинаково. Подвижный блок висит на двух кусках этой нити и потому тянет точку E вдвое сильнее, чем нить тянет точку D. Две неизвестные силы — два уравнения.

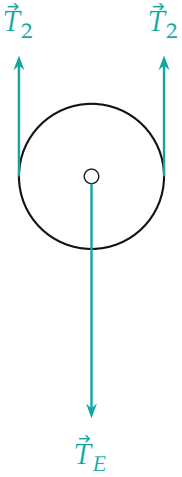
Обозначения. l — длина стержня, $BC = CD = DE = \frac{l}{3}$; T_1 — натяжение нити AB (искомое); T_2 — натяжение нити, огибающей блоки; T_E — натяжение нити от оси подвижного блока к точке E; ось y — вертикально вверх.

1. Груз: условие равновесия. На груз действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и натяжение нити C: нить тянет стержень в точке C вниз с силой mg.

2. Подвижный блок: второй закон Ньютона в проекции на ось y. Блок идеальный (невесомый), на него действуют два куска нити вверх, по T_2 каждый, и нить к точке E вниз (рисунок 2):

$$2T_2 - T_E = 0 \quad \Longrightarrow \quad T_E = 2T_2.$$

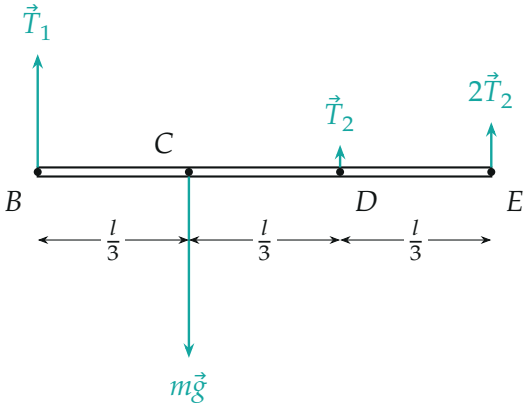
Неподвижный блок только поворачивает нить: в точке D нить тянет стержень вверх с той же силой T_2.



Силы, действующие на подвижный блок: два куска одной нити вверх и нить к стержню вниз; $T_E = 2T_2$.

3. Стержень: условие равновесия сил в проекции на ось y. На стержень действуют (рисунок 3): T_1 вверх в точке B, mg вниз в точке C, T_2 вверх в точке D, $2T_2$ вверх в точке E. Стержень лёгкий, его силы тяжести нет:

$$T_1 - mg + T_2 + 2T_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad T_1 + 3T_2 = mg.$$



Силы, действующие на стержень; длины стрелок — по найденным значениям (37,5, 60, 7,5, 15 Н).

4. Стержень: правило моментов относительно точки C**.** Ось через C выбрана, чтобы исключить силу mg. Моменты против часовой стрелки (поворот, который даёт T_1 на левом плече) равны моментам по часовой (их дают T_2 и $2T_2$ на правом плече):

$$T_1 \cdot \frac{l}{3} = T_2 \cdot \frac{l}{3} + 2T_2 \cdot \frac{2l}{3} \quad \Longrightarrow \quad T_1 = 5T_2.$$

5. Решаем систему. Подставляем $T_2 = \frac{T_1}{5}$ в шаг 3:

$$T_1 + \frac{3T_1}{5} = mg \quad \Longrightarrow \quad T_1 = \frac{5}{8}mg = \frac{5}{8} \cdot 6 \cdot 10 \text{ Н} = 37{,}5 \text{ Н},$$

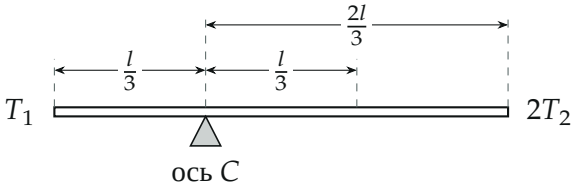
и $T_2 = 7{,}5$ Н, $T_E = 15$ Н.

6. Второй способ: моменты относительно точки B**.** Сила T_1 проходит через B и выпадает:

$$mg \cdot \frac{l}{3} = T_2 \cdot \frac{2l}{3} + 2T_2 \cdot l \quad \Longrightarrow \quad T_2 = \frac{mg}{8} = 7{,}5 \text{ Н},$$

$$T_1 = mg - 3T_2 = 60 \text{ Н} - 22{,}5 \text{ Н} = 37{,}5 \text{ Н}.$$

Плечи сил относительно двух осей показаны на рисунке 4.



Плечи относительно оси C: у T_1 — $\frac{l}{3}$, у T_2 — $\frac{l}{3}$, у $2T_2$ — $\frac{2l}{3}$. Относительно B плечи равны $\frac{l}{3}$, $\frac{2l}{3}$ и l.

Обратите внимание. Сила в точке E равна $2T_2$, а не T_2: точку E держит не сама нить, а ось подвижного блока, на которой висят два куска нити.

Ответ:

$$T_1 = \frac{5}{8}mg = 37{,}5\ \text{Н}.$$

Проверка. Размерность: mg — сила. Знак: все $T > 0$ — нити натянуты, как и должно быть. Второй способ (моменты относительно B) даёт то же; моменты относительно E: $T_1 l - mg\cdot\frac{2l}{3} + T_2\cdot\frac{l}{3} = 37{,}5 - 40 + 2{,}5 = 0$ — сходится.

Ответ. $T_{AB} = \frac{5}{8}mg = 37{,}5\ \text{Н}$.