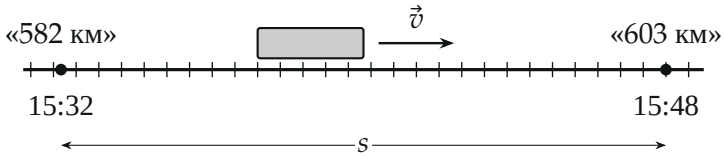
Поезд и неточные часы

Задача 3. [Курчатов 2015/16, 8 класс, задача 3] Поезд прошёл прямой участок железной дороги от полустанка «582 км» до полустанка «603 км» с постоянной скоростью, без остановок. Пассажир, находящийся на полустанке «582 км», отметил, что поезд прошёл его полустанок в 15:32, а пассажир, находящийся на полустанке «603 км», отметил, что его полустанок поезд прошёл в 15:48. С какой скоростью мог двигаться поезд, если известно, что часы пассажиров установлены неточно, но погрешность каждого из приборов не превышает 1 минуты?



Поясняющий рисунок: поезд идёт равномерно от одного полустанка к другому; под полустанками — показания часов пассажиров.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на равномерное движение и оценку по крайним случаям. Скорость равна пути, делённому на время, путь известен точно, а время — нет: каждое из двух показаний часов может отличаться от верного на минуту в любую сторону. Скорость наименьшая при наибольшем возможном времени в пути и наибольшая — при наименьшем. Значит, нужно найти диапазон истинного времени движения.

Обозначения. s — расстояние между полустанками; t_1, t_2 — истинные моменты прохождения первого и второго полустанков; $\tau = t_2 - t_1$ — истинное время в пути; $v = \frac{s}{\tau}$.

1. Расстояние. Названия полустанков — их километровые отметки на одной прямой дороге:

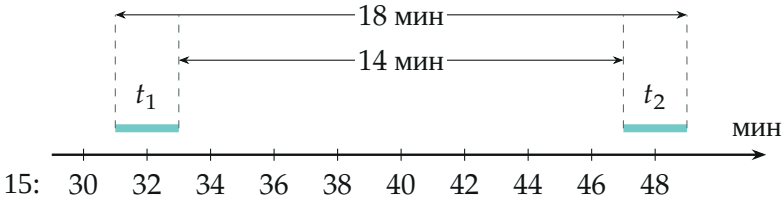
$$s = 603\text{ км} - 582\text{ км} = 21\text{ км}.$$

2. Возможные истинные моменты. Погрешность каждых часов не

больше 1 мин, поэтому

$$15{:}31 \leq t_1 \leq 15{:}33, \qquad 15{:}47 \leq t_2 \leq 15{:}49.$$

Часы разные и сбиты независимо, поэтому любые сочетания t_1 и t_2 из этих промежутков возможны (рисунок 2).



Шкала времени после 15:00. Бирюзовые отрезки — где на самом деле могли быть моменты t_1 и t_2; самый короткий и самый длинный промежутки между ними — 14 и 18 мин.

3. Наибольшее и наименьшее время в пути. Время $\tau = t_2 - t_1$ наибольшее, когда t_2 наибольшее, а t_1 наименьшее (первые часы спешили, вторые отставали):

$$\tau_{\max} = 15{:}49 - 15{:}31 = 18 \text{ мин} = 0{,}3 \text{ ч}.$$

Наименьшее — наоборот (первые часы отставали, вторые спешили):

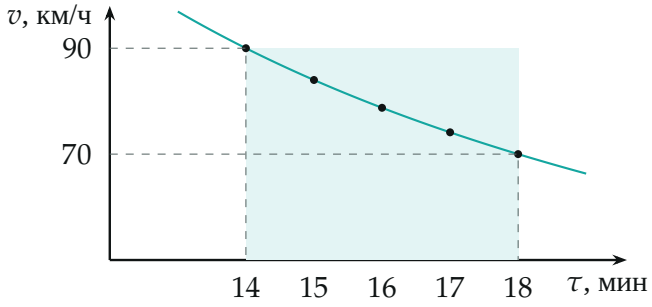
$$\tau_{\min} = 15{:}47 - 15{:}33 = 14 \text{ мин} = \frac{7}{30} \text{ ч}.$$

4. Диапазон скоростей: равномерное движение $v = \frac{s}{\tau}$.

$$v_{\min} = \frac{s}{\tau_{\max}} = \frac{21 \text{ км}}{0{,}3 \text{ ч}} = 70 \text{ км/ч},$$

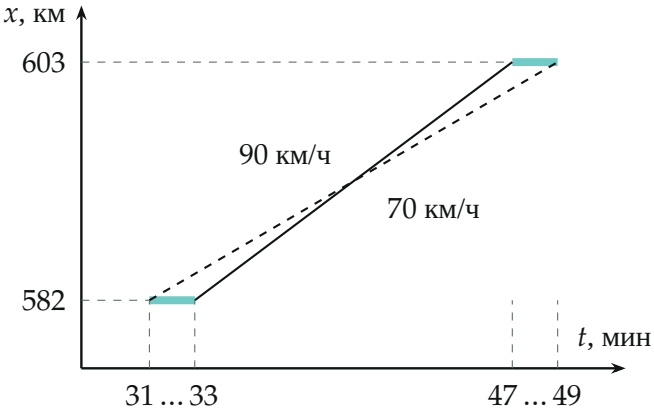
$$v_{\max} = \frac{s}{\tau_{\min}} = \frac{21 \cdot 30}{7} \text{ км/ч} = 90 \text{ км/ч}.$$

Функция $v(\tau) = \frac{s}{\tau}$ убывает, поэтому все промежуточные τ дают скорости между этими значениями (рисунок 3).



Скорость $v = \frac{21\ км}{\tau}$ в зависимости от истинного времени в пути: точки — через минуту, 90; 84; 78,75; 74,1; 70 км/ч.

5. Второй способ: график движения. На графике $x(t)$ поезд — прямая, проходящая через отрезок t_1 на уровне 582 км и через отрезок t_2 на уровне 603 км (рисунок 4). Наклон прямой — скорость. Самая крутая прямая соединяет правый конец первого отрезка с левым концом второго, самая пологая — левый конец с правым: это те же 14 и 18 мин.



Графики движения: сплошная — самая быстрая из возможных, пунктир — самая медленная.

Обратите внимание. Время по показаниям часов — 16 мин, скорость 78,75 км/ч — лишь одна из возможных, и она не середина диапазона: $v = \frac{s}{\tau}$ не линейна по τ. Погрешность разности двух показаний вдвое больше погрешности одних часов: ± 2 мин.

Ответ:

$$\frac{s}{\tau_{\max}} \le v \le \frac{s}{\tau_{\min}}, \qquad 70 \text{ км/ч} \le v \le 90 \text{ км/ч}.$$

Проверка. Размерность: км/ч. Предел: если бы часы шли точно, получилось бы одно значение $\frac{21}{16/60} = 78{,}75$ км/ч — оно внутри диапазона. Второй способ (график движения) даёт те же крайние прямые.

Ответ. От 70 км/ч до 90 км/ч.