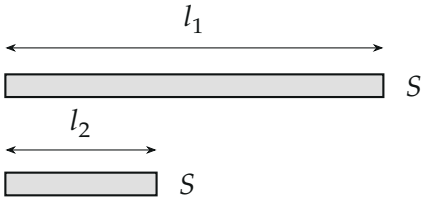
Два куска проволоки

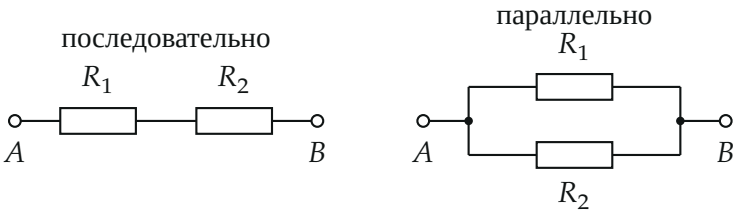
Задача 4. [Курчатов 2015/16, 8 класс, задача 4] В лаборатории есть два куска медной проволоки одинакового поперечного сечения. Сопротивление этих кусков, соединённых последовательно, в 6,25 раза больше сопротивления этих же кусков, соединённых параллельно. Найдите отношение длин этих кусков проволоки.



Поясняющий рисунок: два куска одной и той же проволоки, сечение S одинаковое, длины l_1 и l_2.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на последовательное и параллельное соединение проводников. Отношение сопротивлений двух соединений зависит только от отношения сопротивлений самих кусков — получаем уравнение на это отношение. У проволок одного материала и одного сечения сопротивление пропорционально длине, поэтому отношение сопротивлений и есть отношение длин.

Обозначения. R_1, R_2 — сопротивления кусков; $x = \frac{R_2}{R_1}$; $R_{\text{посл}}$, $R_{\text{пар}}$ — сопротивления двух соединений между выводами A и B (рисунок 2).



Два соединения одних и тех же кусков; сопротивление измеряется между выводами A и B.

1. Сопротивления двух соединений. При последовательном соединении ток через куски один, напряжения складываются:

$$R_{\text{посл}} = R_1 + R_2 = (1 + x)R_1.$$

При параллельном напряжение на кусках одно, токи складываются: $\frac{1}{R_{\text{пар}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, откуда

$$R_{\text{пар}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{x}{1 + x} R_1.$$

2. Условие задачи — уравнение на x.

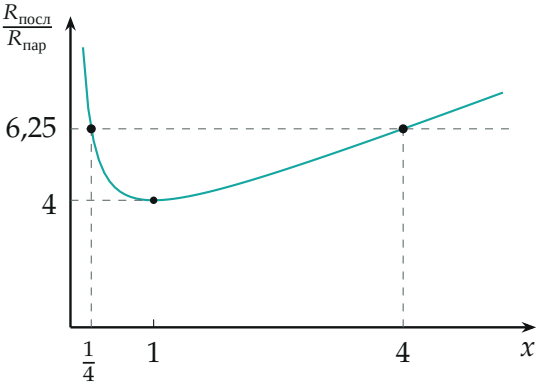
$$\frac{R_{\text{посл}}}{R_{\text{пар}}} = (1 + x)R_1 \cdot \frac{1 + x}{x\,R_1} = \frac{(1 + x)^2}{x} = 6{,}25.$$

3. Квадратное уравнение.

$$(1 + x)^2 = 6{,}25x \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 4{,}25x + 1 = 0,$$

$$x = \frac{4{,}25 \pm \sqrt{4{,}25^2 - 4}}{2} = \frac{4{,}25 \pm 3{,}75}{2}.$$

Корни $x_1 = 4$ и $x_2 = 0{,}25$. Их произведение равно 1 (теорема Виета): это одно и то же решение, только куски названы в другом порядке. Графически — пересечение кривой $\frac{(1+x)^2}{x}$ с прямой 6,25 (рисунок 3).

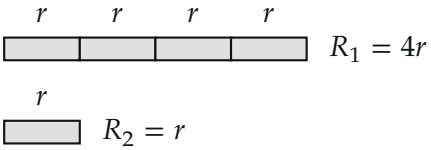


Отношение сопротивлений как функция $x = R_2/R_1$: наименьшее значение 4 при равных кусках; уровень 6,25 достигается при $x = \frac{1}{4}$ и $x = 4$.

4. От сопротивлений к длинам. Сопротивление проволоки $R = \rho_м \frac{l}{S}$, где $\rho_м$ — удельное сопротивление меди. Материал и сечение одинаковы, поэтому

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{R_2}{R_1} = x = 4 \quad \text{или} \quad \frac{1}{4}.$$

Наглядно: разрежем оба куска на одинаковые отрезки; у каждого отрезка одно и то же сопротивление r, и кусок — это k таких отрезков последовательно, $R = kr$ (рисунок 4).



Кусок из четырёх одинаковых отрезков и кусок из одного: сопротивления относятся как длины, 4 : 1.

5. Второй способ: проверка подстановкой. Пусть $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 1$ Ом. Тогда $R_{посл} = 5$ Ом, $R_{пар} = \frac{4 \cdot 1}{4+1}$ Ом $= 0{,}8$ Ом, и

$$\frac{R_{посл}}{R_{пар}} = \frac{5}{0{,}8} = 6{,}25.$$

Обратите внимание. Отношение $\frac{(1+x)^2}{x}$ не меньше 4 (рисунок 3): последовательное соединение двух проводников всегда хотя бы вчетверо «сопротивляется» сильнее параллельного, и равенство — только при одинаковых кусках. Оба корня описывают одну и ту же пару кусков: x и $\frac{1}{x}$ отличаются лишь тем, какой кусок назван первым.

Ответ:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{R_1}{R_2} = 4 \text{ (или } \frac{1}{4}\text{, если длиннее второй кусок).}$$

Проверка. Размерность: отношение безразмерно. Предел: равные куски ($x = 1$) дают отношение 4, а не 6,25 — значит, куски разные, как

и получилось. Подстановка 4 и 1 Ом даёт ровно 6,25; python: корни 4 и 0,25.

Ответ. Один кусок в 4 раза длиннее другого: $l_1 : l_2 = 4 : 1$ (или $1 : 4$).