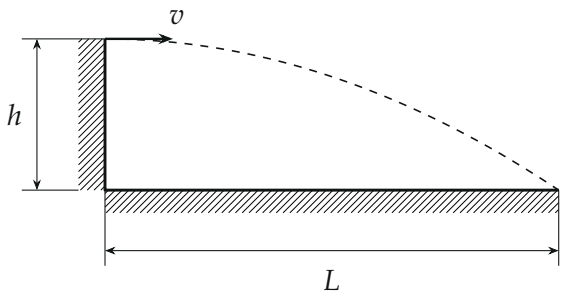
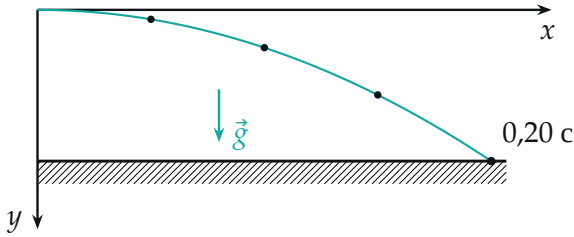
Бросок и дальность в три раза больше высоты

Задача 1. [Курчатов 2015/16, 9 класс, задача 1] Дальность полёта L тела, брошенного горизонтально со скоростью $v = 3$ м/с, в 3 раза больше высоты h, с которой бросили тело. Найдите время полёта тела и модуль скорости тела непосредственно перед падением на горизонтальную поверхность. Модуль ускорения свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на движение тела, брошенного горизонтально. Без сопротивления воздуха ускорение тела всё время равно $\vec{g}$ и направлено вниз, поэтому движение раскладывается на два независимых: по горизонтали — равномерное со скоростью v, по вертикали — равноускоренное без начальной скорости. Оба движения длятся одно и то же время t, и условие $L = 3h$ связывает их через это время.

Обозначения. t — время полёта; ось x — горизонтально в сторону броска, ось y — вертикально вниз, начало — в точке броска (рисунок 2); v_1 — модуль скорости перед падением, v_x, v_y — её проекции.



Траектория по точкам через каждые 0,05 *с: за равные промежутки тело сдвигается по горизонтали на одно и то же расстояние* 0,15 *м, а по вертикали — всё быстрее.*

1. Горизонтальное движение: равномерное. Проекция ускорения на ось x равна нулю, поэтому $v_x = v$ всё время, и за время полёта

$$L = vt.$$

2. Вертикальное движение: равноускоренное без начальной скорости. Проекция ускорения на ось y равна g, начальная скорость по y равна нулю, поэтому тело опускается на высоту броска за время t:

$$h = \frac{gt^2}{2}.$$

3. Условие $L = 3h$. Подставляем оба выражения:

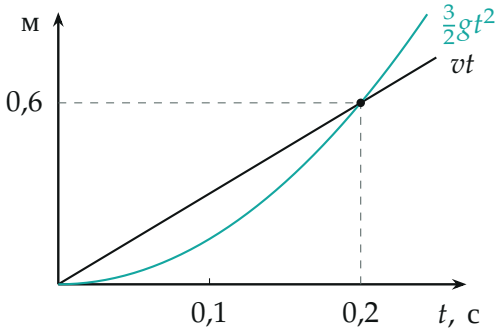
$$vt = 3 \cdot \frac{gt^2}{2} \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{2v}{3g}.$$

Корень $t = 0$ отбрасываем: это момент броска. Значения:

$$t = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 10}\ \text{с} = 0{,}2\ \text{с}, \qquad h = \frac{10 \cdot 0{,}2^2}{2}\ \text{м} = 0{,}2\ \text{м},$$

$$L = 3 \cdot 0{,}2\ \text{с} = 0{,}6\ \text{м} = 3h.$$

Графически это точка пересечения прямой $L(t) = vt$ и параболы $3h(t) = \frac{3}{2}gt^2$ (рисунок 3).



Пройденное по горизонтали vt и утроенная высота падения $\frac{3}{2}gt^2$: равенство $L = 3h$ выполняется в момент $t = 0{,}2$ с.

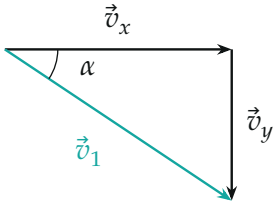
4. Скорость перед падением: сложение проекций. В момент падения

$$v_x = v, \qquad v_y = gt = \frac{2v}{3},$$

и по теореме Пифагора (рисунок 4)

$$v_1 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v\sqrt{1 + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{3}v.$$

Значения: $v_y = 10 \cdot 0{,}2$ м/с $= 2$ м/с, $v_1 = \sqrt{3^2 + 2^2}$ м/с $= \sqrt{13}$ м/с $\approx$ 3,6 м/с.



Скорость перед падением — сумма горизонтальной $\vec{v}_x$ (не изменилась) и вертикальной $\vec{v}_y$ (набрана за время полёта).

5. Второй способ: закон сохранения механической энергии. Сопротивления нет, работу совершает только сила тяжести, поэтому для тела

массой m

$$\frac{mv^2}{2} + mgh = \frac{mv_1^2}{2} \quad \Longrightarrow \quad v_1 = \sqrt{v^2 + 2gh},$$

$$v_1 = \sqrt{9 + 2 \cdot 10 \cdot 0{,}2}\ \text{м/с} = \sqrt{13}\ \text{м/с}.$$

Результаты совпадают.

Обратите внимание. Время полёта зависит только от высоты, а не от скорости броска; здесь же высота не дана, и время находится из связи $L = 3h$. Отсюда же видно, что угол падения не зависит от v: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{v_y}{v_x} = \dfrac{2}{3}$, $\alpha \approx 34°$ — это просто следствие $L = 3h$.

Ответ:

$$t = \frac{2v}{3g} = 0{,}2\ \text{с}, \qquad v_1 = \frac{\sqrt{13}}{3}v = \sqrt{13}\ \text{м/с} \approx 3{,}6\ \text{м/с}.$$

Проверка. Размерности: $\frac{v}{g}$ — секунды, v_1 — м/с. Знак и предел: $v_1 > v$, как и должно быть после падения. python: $t = 0{,}2$ с, $h = 0{,}2$ м, $L = 0{,}6$ м, $v_1 = 3{,}6056$ м/с обоими способами.

Ответ. $t = \dfrac{2v}{3g} = 0{,}2$ с; $\quad v_1 = \sqrt{13}\ \text{м/с} \approx 3{,}6\ \text{м/с}$.