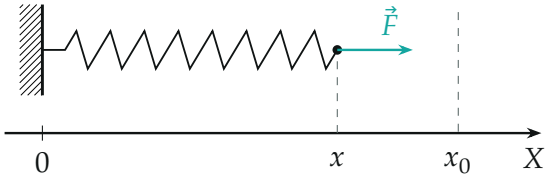
Работа при растяжении пружины

Задача 2. [Курчатов 2015/16, 9 класс, задача 2] Пружина расположена вдоль оси X. Один из концов пружины закреплён. Для перемещения второго конца пружины из положения с координатой «a» в положение с координатой «b» потребовалось совершить работу A. Для перемещения этого же конца пружины из положения с координатой «$2a$» в положение с координатой «$2b$» потребовалось совершить работу $1{,}5A$. Какая работа потребуется для перемещения этого же конца пружины из положения «$3a$» в положение «$3b$»?



Поясняющий рисунок: закреплённый конец — в начале оси, свободный конец — в точке x; x_0 — координата конца недеформированной пружины, $\vec{F}$ — сила, с которой мы держим конец.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на работу упругой силы. Конец пружины перемещают медленно, поэтому работа внешней силы равна изменению потенциальной энергии пружины $\frac{k(x-x_0)^2}{2}$. Где находится конец недеформированной пружины, не сказано: x_0 — вторая неизвестная наряду с k, a, b. Найти их все нельзя, но и не нужно: работа при перемещении $\lambda a \to \lambda b$ оказывается квадратным трёхчленом от λ, и два известных значения определяют третье.

Обозначения. k — жёсткость, x_0 — координата свободного конца недеформированной пружины, $W(\lambda)$ — работа при перемещении конца из λa в λb; по условию $W(1) = A$, $W(2) = 1{,}5A$, найти $W(3)$.

1. Работа внешней силы: теорема о потенциальной энергии. Конец перемещают медленно (без разгона), поэтому вся работа внешней силы идёт в потенциальную энергию пружины:

$$W(\lambda) = \frac{k(\lambda b - x_0)^2}{2} - \frac{k(\lambda a - x_0)^2}{2}.$$

Энергия зависит только от положения конца, поэтому работа не зависит от того, как именно конец двигали между точками.

2. Работа — квадратный трёхчлен от λ. Раскрываем квадраты; слагаемые $\frac{kx_0^2}{2}$ сокращаются:

$$W(\lambda) = \frac{k(b^2 - a^2)}{2}\lambda^2 - kx_0(b-a)\lambda = \alpha\lambda^2 + \beta\lambda,$$

где $\alpha = \frac{k(b^2-a^2)}{2}$ и $\beta = -kx_0(b-a)$ — числа, не зависящие от λ. Свободного члена нет: $W(0) = 0$ (из точки 0 в точку 0).

3. Два условия — два уравнения.

$$W(1) = \alpha + \beta = A, \qquad W(2) = 4\alpha + 2\beta = 1{,}5A.$$

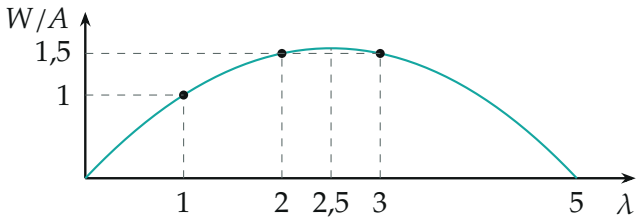
Вычитаем из второго удвоенное первое: $2\alpha = -0{,}5A$, то есть

$$\alpha = -\frac{A}{4}, \qquad \beta = A - \alpha = \frac{5A}{4}.$$

4. Искомая работа.

$$W(3) = 9\alpha + 3\beta = -\frac{9A}{4} + \frac{15A}{4} = \frac{3A}{2} = 1{,}5A.$$

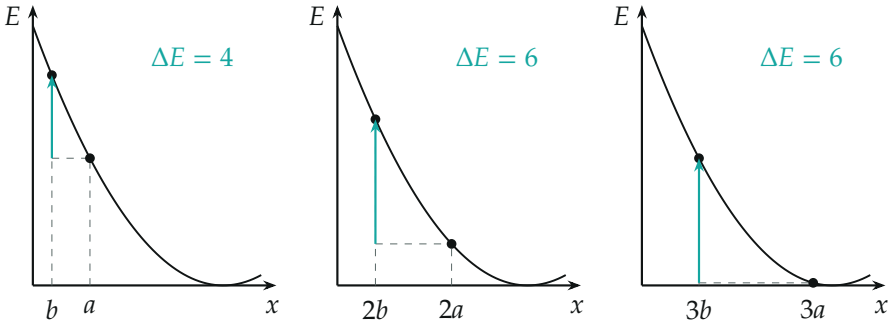
Вообще $W(\lambda) = \frac{A}{4}\lambda(5-\lambda)$: парабола, симметричная относительно $\lambda = 2{,}5$, поэтому $W(2) = W(3)$ (рисунок 2).



Работа как функция множителя λ: $W(\lambda) = \frac{A}{4}\lambda(5-\lambda)$. Через точки $\lambda = 1$ и $\lambda = 2$ и начало координат проходит ровно одна такая парабола.

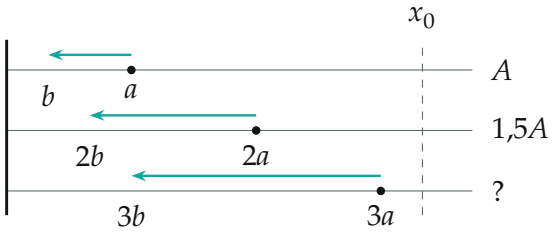
5. Второй способ: подставим конкретные числа. Проверим, что такие a, b, x_0 вообще бывают. Возьмём $k = 1$, $A = 4$ (в условных единицах). Из шага 3: $b^2 - a^2 = 2\alpha = -2$ и $x_0(b-a) = -\beta = -5$. Подходят $a = 1{,}5$, $b = 0{,}5$, $x_0 = 5$: пружина сжата и её сжимают ещё сильнее (рисунок 3). Энергии $E(x) = \frac{(x-5)^2}{2}$:

перемещение	E(начало)	E(конец)	работа
$1{,}5 \to 0{,}5$	6,125	10,125	$4 = A$
$3 \to 1$	2	8	$6 = 1{,}5A$
$4{,}5 \to 1{,}5$	0,125	6,125	$6 = 1{,}5A$



Пример: энергия пружины $E(x)$ при $x_0 = 5$, $a = 1{,}5$, $b = 0{,}5$. Бирюзовая стрелка — прирост энергии, то есть работа: 4, 6, 6.

На рисунке 4 те же перемещения показаны на оси: конец каждый раз сдвигается влево, к стене, и сжатие растёт.



Три перемещения конца в примере; справа — работа. Стена — закреплённый конец в точке 0.

Обратите внимание. Работа не пропорциональна λ^2: если бы недеформированная пружина кончалась в начале координат ($x_0 = 0$), было бы $W(2) = 4A$, а не $1{,}5A$. Именно неизвестное x_0 даёт линейное слагаемое $\beta\lambda$.

Ответ:

$$W(3) = 9\alpha + 3\beta = 1{,}5A.$$

Проверка. Размерность: α и β — работы, $W(3)$ — работа. Второй способ — пример с числами: 4, 6, 6, отношение $W(3)/W(1) = 1{,}5$. python: при случайных k, a, b, x_0, подобранных под $W(2) = 1{,}5W(1)$, всегда $W(3) = 1{,}5W(1)$.

Ответ. $1{,}5A$.