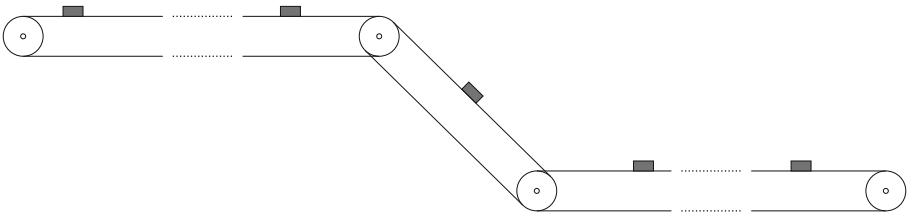
Транспортёр с воздушными шарами

Задача 3. [Курчатов 2015/16, 9 класс, задача 3] На ленте длинного транспортёра, имеющего два горизонтальных участка и один наклонный, движутся с постоянной скоростью одинаковые грузы массой M. Грузы расположены вдоль ленты на одинаковых расстояниях друг от друга и не скользят по ней. Лента приводится в движение мотором постоянной мощности. С нижнего горизонтального участка транспортёра на верхний поднимается N грузов в минуту. После того, как к каждому грузу привязали воздушный шар массой m и объёмом v, транспортёр стал поднимать n грузов в минуту. Найдите величину n. Мощность мотора после привязывания шаров осталась прежней, плотность воздуха ρ, $\frac{M}{v} > \rho > \frac{m}{v}$. Потерями механической энергии в системе можно пренебречь.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на мощность и закон сохранения энергии. Лента и грузы движутся равномерно, потерь нет, поэтому вся работа мотора идёт на увеличение потенциальной энергии поднимаемых грузов. Шар, привязанный к грузу, поднимается вместе с ним, но воздух выталкивает его вверх: выигрыш мотору даёт сила Архимеда. На языке энергии: когда шар поднимается на высоту h, такой же объём воздуха опускается на h и отдаёт энергию. Мощность одна и та же — значит, «тяжёлых» грузов в минуту поднимается меньше, «облегчённых» — больше.

Обозначения. P — мощность мотора; h — разность высот горизонтальных участков; α — угол наклона; u — скорость ленты; d — расстояние между соседними грузами; $\tau = 1$ мин.

1. Мощность без шаров: закон сохранения энергии для системы «лента + грузы». Скорости грузов не меняются, их кинетическая энергия постоянна; на горизонтальных участках высота тоже не меняется. За время τ с нижнего участка на верхний переходят N грузов: в итоге N грузов поднялись на h (а положения остальных повторились). Работа мотора за τ равна приросту потенциальной энергии:

$$P\tau = NMgh.$$

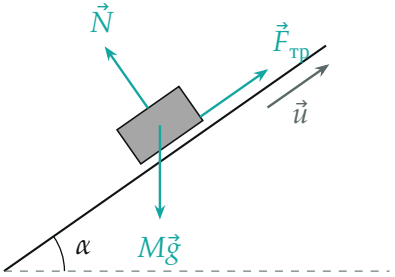
2. Тот же результат через силы. Проверим шаг 1 «по Ньютону». Груз на наклонном участке движется равномерно: второй закон Ньютона в проекции на направление ленты (рисунок 2)

$$F_{\text{тр}} - Mg\sin\alpha = 0 \quad \Longrightarrow \quad F_{\text{тр}} = Mg\sin\alpha.$$

По третьему закону Ньютона каждый груз тянет ленту назад с силой $Mg\sin\alpha$. На наклонном участке длиной $\ell = \frac{h}{\sin\alpha}$ лежат $\frac{\ell}{d}$ грузов, и мотор, двигая ленту со скоростью u, развивает мощность

$$P = \frac{\ell}{d}\,Mg\sin\alpha \cdot u = Mgh\,\frac{u}{d}.$$

А $\frac{u}{d}$ — число грузов, проходящих точку ленты за единицу времени, то есть $\frac{N}{\tau}$. Получаем $P\tau = NMgh$, как в шаге 1.

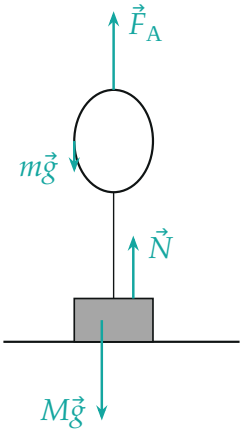


Груз на наклонном участке: сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$ направлена вдоль ленты вверх и уравновешивает скатывающую составляющую силы тяжести.

3. Силы, действующие на груз с шаром. Груз и шар связаны, рассматриваем их как одно тело массой $M+m$. На шар действует ещё сила Архимеда $F_\text{A} = \rho v g$ вверх (объёмом груза пренебрегаем: в условии он не дан). Вертикальные силы, кроме реакции ленты, дают «эффективный вес» (рисунок 3)

$$(M+m)g - \rho v g = (M + m - \rho v)\, g.$$

Условие $\frac{M}{v} > \rho$ означает $M + m - \rho v > 0$: груз с шаром по-прежнему давит на ленту и не улетает. Условие $\rho > \frac{m}{v}$ означает $m < \rho v$: шар сам по себе взлетел бы, то есть облегчает груз.

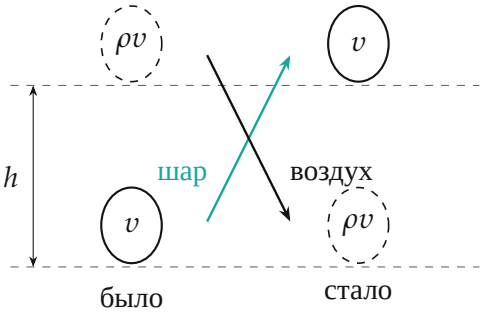


Груз с шаром (для наглядности — на горизонтальном участке): сила Архимеда $\vec{F}_A$ больше силы тяжести шара $m\vec{g}$, и груз давит на ленту слабее.

4. Мощность с шарами: тот же закон сохранения энергии. В системе теперь участвует и воздух. Когда груз с шаром поднимается на высоту h, его потенциальная энергия растёт на $(M+m)gh$; место шара внизу занимает воздух, а наверху шар вытесняет такой же объём воздуха — в итоге воздух массой ρv как бы опустился на h (рисунок 4), и его энергия уменьшилась на $\rho v g h$. За время τ поднимаются n грузов:

$$P\tau = n\,(M + m - \rho v)\, gh.$$

Тот же ответ дают силы: в шаге 2 вместо Mg стоит эффективный вес $(M+m-\rho v)g$ из шага 3.



Подъём шара — то же, что обмен местами: шар (сплошной контур) поднимается на h, воздух того же объёма (пунктир) опускается на h.

5. Мощность не изменилась — приравниваем.

$$NMgh = n\,(M+m-\rho v)\,gh \quad\Longrightarrow\quad n = \frac{M}{M+m-\rho v}\,N.$$

Знаменатель меньше M (так как $m < \rho v$), поэтому $n > N$: транспортёр поднимает грузы чаще — лента пошла быстрее.

Обратите внимание. Мотор работает только на наклонном участке: на горизонтальных грузы не поднимаются, и сила трения на них равна нулю. Поэтому длины горизонтальных участков и число грузов на них в ответ не входят.

Ответ:

$$n = \frac{P\tau}{(M+m-\rho v)gh} = \frac{M}{M+m-\rho v}\,N.$$

Проверка. Размерность: дробь безразмерна, n — грузов в минуту, как и N. Предел: шар «невесомый и пустой» ($m=0$, $v=0$) — $n=N$. Если бы ρv приближалось к $M+m$, груз с шаром стал бы почти невесомым и $n \to \infty$ — мотор почти не нагружен. Второй способ — через силы трения (шаги 2 и 3) — даёт то же.

Ответ. $n = \dfrac{M}{M+m-\rho v}\,N.$