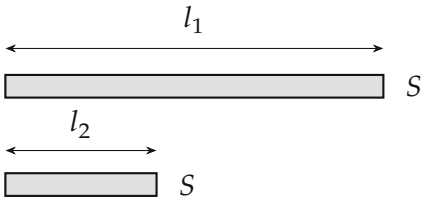
Параллельное и последовательное соединение проволок

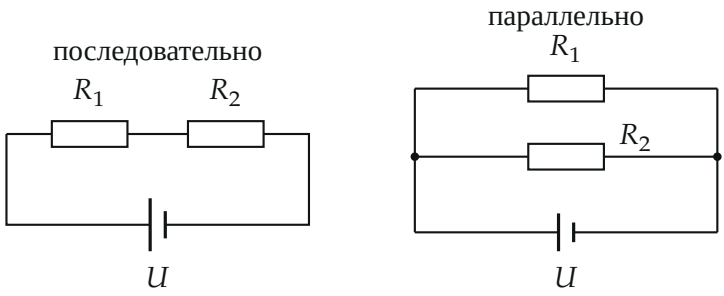
Задача 4. [Курчатов 2015/16, 9 класс, задача 4] В лаборатории есть два куска медной проволоки одинакового поперечного сечения. Если два этих куска соединить параллельно и подключить к идеальному источнику постоянного напряжения, то выделяющаяся в цепи мощность будет в 4,9 раза больше, чем если те же куски проволоки соединить последовательно и подсоединить к тому же источнику. Найдите отношение длин этих кусков проволоки.



Поясняющий рисунок: два куска одной и той же проволоки, сечение S одинаковое, длины l_1 и l_2.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на соединения проводников и мощность тока. Источник идеальный — напряжение U на нагрузке одно и то же при любом соединении, поэтому мощность $P = \frac{U^2}{R}$ обратно пропорциональна сопротивлению цепи. Отношение мощностей даёт отношение сопротивлений параллельного и последовательного соединений, а оно зависит только от отношения сопротивлений кусков. У проволок одного материала и сечения сопротивление пропорционально длине.

Обозначения. U — напряжение источника; R_1, R_2 — сопротивления кусков; $x = \frac{R_2}{R_1}$; $R_{\text{посл}}$, $R_{\text{пар}}$ и $P_{\text{посл}}$, $P_{\text{пар}}$ — сопротивления и мощности при двух соединениях (рисунок 2).



Две схемы подключения к одному и тому же идеальному источнику напряжения U.

1. Сопротивления двух соединений. При последовательном соединении ток через куски один, напряжения складываются:

$$R_{\text{посл}} = R_1 + R_2 = (1 + x)R_1.$$

При параллельном напряжение на кусках одно, токи складываются: $\frac{1}{R_{\text{пар}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, откуда

$$R_{\text{пар}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{x}{1 + x} R_1.$$

2. Мощность при постоянном напряжении: закон Джоуля — Ленца с законом Ома. Напряжение на цепи равно U в обоих случаях, поэтому $P = \frac{U^2}{R}$ и

$$\frac{P_{\text{пар}}}{P_{\text{посл}}} = \frac{R_{\text{посл}}}{R_{\text{пар}}} = \frac{(1 + x)^2}{x} = 4{,}9.$$

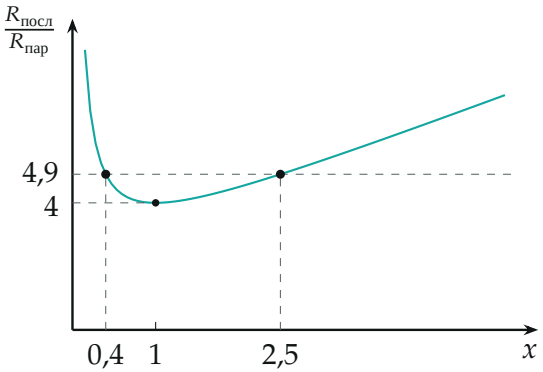
3. Квадратное уравнение.

$$(1 + x)^2 = 4{,}9x \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 2{,}9x + 1 = 0,$$

$$x = \frac{2{,}9 \pm \sqrt{2{,}9^2 - 4}}{2} = \frac{2{,}9 \pm 2{,}1}{2}.$$

Корни $x_1 = 2{,}5$ и $x_2 = 0{,}4$. Их произведение равно 1 (теорема Виета):

это одно и то же решение, только куски названы в другом порядке. Графически — пересечение кривой $\frac{(1+x)^2}{x}$ с прямой 4,9 (рисунок 3).

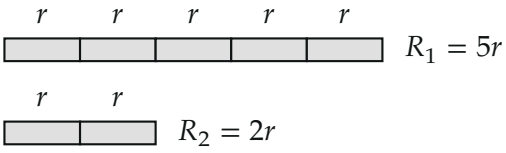


Отношение сопротивлений как функция $x = R_2/R_1$: наименьшее значение 4 при равных кусках; уровень 4,9 достигается при $x = 0{,}4$ и $x = 2{,}5$.

4. От сопротивлений к длинам. Сопротивление проволоки $R = \rho_м \frac{l}{S}$, где $\rho_м$ — удельное сопротивление меди. Материал и сечение одинаковы, поэтому

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{R_2}{R_1} = x = 2{,}5 \quad \text{или} \quad 0{,}4.$$

Наглядно: разрежем оба куска на одинаковые отрезки; у каждого отрезка одно и то же сопротивление r, и кусок — это k таких отрезков последовательно, $R = kr$ (рисунок 4).



Кусок из пяти одинаковых отрезков и кусок из двух: сопротивления относятся как длины, 5 : 2.

5. Второй способ: проверка подстановкой. Пусть $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 5$ Ом. Тогда $R_{\text{посл}} = 7$ Ом, $R_{\text{пар}} = \frac{10}{7}$ Ом, и

$$\frac{R_{\text{посл}}}{R_{\text{пар}}} = 7 \cdot \frac{7}{10} = 4{,}9.$$

Обратите внимание. Отношение $\frac{(1+x)^2}{x}$ не меньше 4 (рисунок 3): при любых кусках параллельное соединение даёт мощность минимум в 4 раза больше последовательного. Поэтому число $4{,}9 > 4$ в условии допустимо, а, скажем, 3 было бы невозможно.

Ответ:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{5}{2} \text{ (или } \frac{2}{5}\text{, если длиннее второй кусок).}$$

Проверка. Размерность: отношение безразмерно. Предел: равные куски ($x = 1$) дают отношение мощностей 4 — известный результат «параллельно вчетверо мощнее». Подстановка 2 и 5 Ом даёт ровно 4,9; python: корни 2,5 и 0,4.

Ответ. Один кусок в 2,5 раза длиннее другого: $l_1 : l_2 = 5 : 2$ (или $2 : 5$).