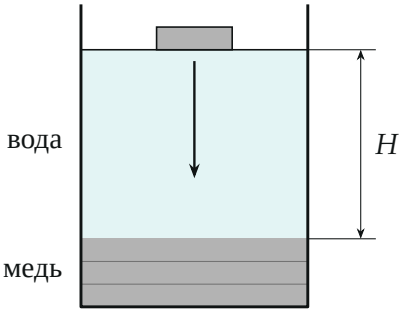
Монеты, падающие в воду

Задача 5. [Курчатов 2015/16, 9 класс, задача 5] У школьника Васи есть много одинаковых медных монет с температурой t_0 и теплоизолированный цилиндрический сосуд с водой, начальная температура которой тоже равна t_0. Вася по одной опускает монеты в воду, отпуская их без начальной скорости с высоты текущего уровня воды. Площадь дна сосуда S, начальный уровень воды H, масса одной монеты m, удельная теплоёмкость меди c, плотность меди равна ρ. Плотность и удельная теплоёмкость воды равны ρ_0 и c_0. До какой максимальной температуры можно нагреть воду таким способом? Сколько нужно бросить в воду монет, чтобы изменение её температуры было вдвое меньше максимально возможного? При решении задачи считайте, что монеты занимают весь объём ниже определённого уровня, то есть образуют на дне сплошной медный цилиндр (промежутки между монетами можно не учитывать). Теплоёмкостью сосуда можно пренебречь.



Поясняющий рисунок: монеты образуют на дне сплошной медный цилиндр; очередную монету отпускают с уровня воды. Над медью всегда слой воды высотой H.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на закон сохранения энергии с переходом механической энергии во внутреннюю. Монета падает в воде и останавливается на дне — её потенциальная энергия переходит в тепло (через сопротивление воды и удар). Но монета не просто опускается: она вытесняет воду, и вода того же объёма поднимается. Тепло

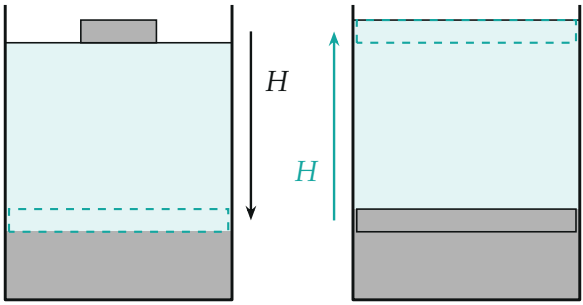
от одной монеты — разность этих двух изменений энергии. Это тепло греет и воду, и все уже лежащие монеты, поэтому каждая новая монета нагревает содержимое всё слабее, и температура стремится к пределу.

Обозначения. $V = \frac{m}{\rho}$ — объём монеты; $M_0 = \rho_0 SH$ — масса воды; Q — тепло от падения одной монеты; Δt_N — изменение температуры после N монет; $\Delta t_{\max}$ — его предельное значение.

1. Слой воды над медью всегда высотой H. Масса воды не меняется, и вода занимает всё сечение S над медным цилиндром (промежутков между монетами нет). Поэтому её высота над медью всё время равна начальной: $\frac{M_0}{\rho_0 S} = H$. Монета, отпущенная с уровня воды, опускается ровно на H.

2. Тепло от одной монеты: закон сохранения энергии. Сравним состояния до и после падения (рисунок 2). Монета опустилась на H — её потенциальная энергия уменьшилась на mgH. Вода сдвинулась вверх на толщину монеты: в итоге слой воды объёмом V снизу (там, где теперь монета) как бы переместился наверх, на H выше; его потенциальная энергия выросла на $\rho_0 VgH$. Скорости в начале и в конце нулевые, поэтому разность ушла в тепло:

$$Q = mgH - \rho_0 VgH = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)mgH.$$



Монета (серая) опускается на H; вода того же объёма (бирюзовый пунктир) в итоге оказывается на H выше. Монета нарисована «размазанной» по сечению — так её и считают в условии.

3. Нагрев после N монет: уравнение теплового баланса. Сосуд теплоизолирован, всё тепло NQ идёт на нагрев воды и N монет, все они в итоге имеют общую температуру $t_0 + \Delta t_N$:

$$NQ = (c_0 M_0 + Ncm)\,\Delta t_N \quad \Longrightarrow \quad \Delta t_N = \frac{NQ}{c_0\rho_0 SH + Ncm}.$$

4. Предельная температура. При $N \to \infty$ теплоёмкость воды становится мала по сравнению с теплоёмкостью монет:

$$\Delta t_{\max} = \lim_{N\to\infty} \frac{Q}{\frac{c_0\rho_0 SH}{N} + cm} = \frac{Q}{cm} = \Big(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\Big)\frac{gH}{c}.$$

Смысл: когда всё уже горячее, тепло Q очередной монеты уходит на нагрев её самой от t_0 до общей температуры — и вода больше не греется. Δt_N растёт с каждой монетой, но этого значения не достигает (рисунок 3).

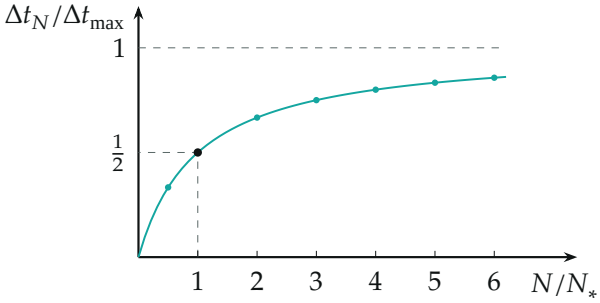
5. Половина максимального нагрева. Перепишем шаг 3 через $\Delta t_{\max} = \frac{Q}{cm}$ и $N_* = \frac{c_0\rho_0 SH}{cm}$:

$$\Delta t_N = \Delta t_{\max} \cdot \frac{N}{N + N_*}.$$

Условие $\Delta t_N = \frac{1}{2}\Delta t_{\max}$ даёт $N + N_* = 2N$, то есть

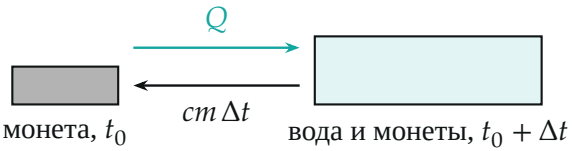
$$N = N_* = \frac{c_0\rho_0 SH}{cm}.$$

Смысл: теплоёмкость брошенных монет Ncm сравнялась с теплоёмкостью воды $c_0\rho_0 SH$.



Нагрев воды в долях максимального: $\frac{N}{N+N_*}$. Половина — при $N = N_*$, дальше рост всё медленнее.

6. Второй способ для предела: последняя монета. Пусть содержимое уже нагрето до $t_0 + \Delta t$, и новая монета с температурой t_0 не меняет общую температуру. Тогда её тепло Q целиком уходит на нагрев её самой: $Q = cm\,\Delta t$, $\Delta t = \frac{Q}{cm}$ — то же значение. При меньшей температуре содержимого очередная монета нагревает его, при большей — охлаждала бы: $\Delta t_{\max}$ — устойчивый предел (рисунок 4).



Монета приносит тепло Q и забирает $cm\,\Delta t$ на собственный нагрев; при $\Delta t = \Delta t_{\max}$ эти потоки равны.

Обратите внимание. Высота падения не уменьшается с каждой монетой: медный цилиндр растёт, но и уровень воды поднимается вместе с ним (шаг 1). Без учёта подъёма воды получилось бы $Q = mgH$ — ошибка на $\frac{\rho_0}{\rho} \approx 11\ \%$ для меди.

Ответ:

$$t_{\max} = t_0 + \frac{Q}{cm} = t_0 + \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)\frac{gH}{c}, \qquad N = \frac{c_0\rho_0 SH}{cm}.$$

Проверка. Размерности: $\frac{gH}{c}$ — $\frac{\text{м}^2/\text{с}^2}{\text{Дж}/(\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C})} = {}^\circ\text{C}$; $\frac{c_0\rho_0 SH}{cm}$ безразмерно. Предел: монета плотности воды ($\rho = \rho_0$) не нагревает ничего —

верно, она «плавает» на любой глубине. Число: при $H = 0{,}2$ м и $c = 385$ Дж/(кг · °C) получаем $\Delta t_{\max} \approx 0{,}005$ °C — способ «нагреть» воду очень слабый.

Ответ. $t_{\max} = t_0 + \left(1 - \dfrac{\rho_0}{\rho}\right)\dfrac{gH}{c}$ (достигается в пределе); $N = \dfrac{c_0\rho_0 SH}{cm}$.