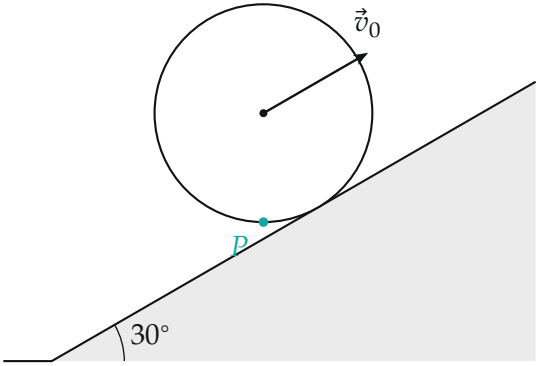
Скорость нижней точки диска

Задача 1. [Курчатов 2016/17, 10 класс, задача 1] Диск катится без проскальзывания с постоянной скоростью v_0 вверх по наклонной плоскости, составляющей угол 30° с горизонтом. Найдите модуль скорости нижней точки диска.



Поясняющий рисунок: диск катится вверх по плоскости; $\vec{v}_0$ — скорость центра, P — нижняя точка диска.

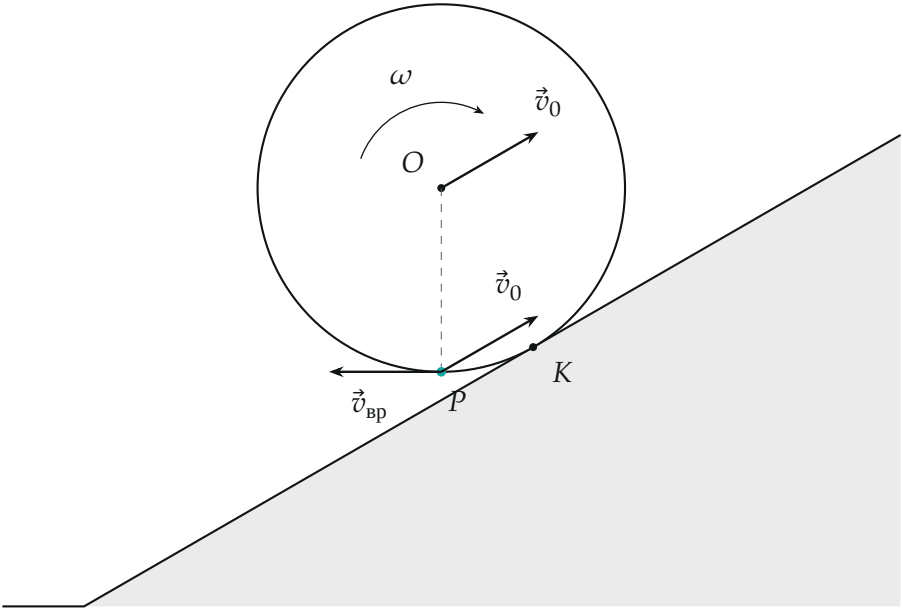
▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на кинематику качения. Движение диска — сумма поступательного движения вместе с центром и вращения вокруг центра. Условие «без проскальзывания» — точка касания с плоскостью покоится — даёт скорость вращения края: она равна v_0. Нижняя точка — самая низкая точка диска, а не точка касания: плоскость наклонена, и касается её другая точка. Для нижней точки скорость вращения горизонтальна, скорость центра направлена вдоль плоскости — складываем их по проекциям.

Обозначения. O — центр, R — радиус, ω — угловая скорость; K — точка касания; P — нижняя точка; $\vec{v}_{\text{вр}}$ — скорость точки во вращении вокруг O; ось x — горизонтально в сторону подъёма, ось y — вверх.

1. Скорость вращения края: условие отсутствия проскальзывания. $\vec{v}_K = \vec{v}_0 + \vec{v}_{\text{вр},K} = 0$, поэтому $\omega R = v_0$. Все точки края вращаются вокруг центра со скоростью

$$v_{\text{вр}} = \omega R = v_0.$$

2. Направления двух скоростей нижней точки. Диск катится вверх вправо — вращается по часовой стрелке. Радиус OP вертикален, скорость вращения ему перпендикулярна: горизонтальна и у нижней точки направлена назад, влево (рисунок 2). Скорость центра $\vec{v}_0$ — вдоль плоскости, под углом 30° к горизонту вверх.



Скорость точки P — сумма скорости центра $\vec{v}_0$ (вдоль плоскости) и скорости вращения $\vec{v}_{вр}$ (горизонтально назад); обе по модулю v_0.

3. Сложение скоростей в проекциях. $\vec{v}_P = \vec{v}_0 + \vec{v}_{вр,P}$:

$$v_{Px} = v_0 \cos 30^\circ - v_0, \qquad v_{Py} = v_0 \sin 30^\circ.$$

Значения:

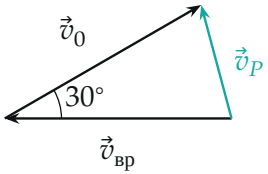
$$v_{Px} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) v_0 \approx -0{,}134\, v_0, \qquad v_{Py} = \frac{v_0}{2}.$$

Знак минус у v_{Px}: нижняя точка чуть смещается назад, почти вертикально вверх.

4. Модуль: теорема Пифагора.

$$v_P = v_0\sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}} = v_0\sqrt{1-\sqrt{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{2-\sqrt{3}}\,v_0.$$

Треугольник скоростей (рисунок 3): две стороны длиной v_0, угол между векторами $\vec{v}_{\text{вр}}$ и $\vec{v}_0$ равен 150°, в треугольнике — 30°; третья сторона $2v_0\sin 15°$.

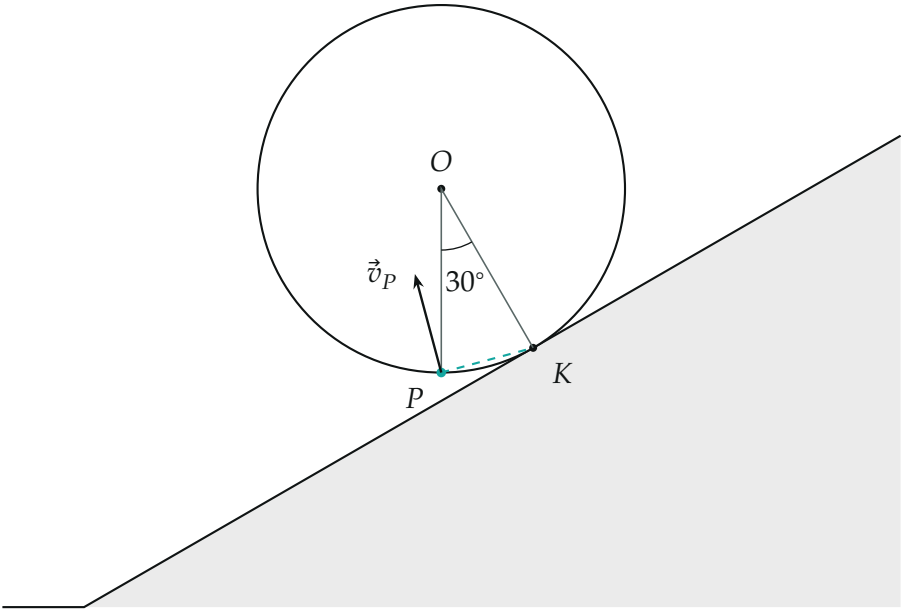


Треугольник скоростей нижней точки: равнобедренный, угол при вершине 30°*;* $v_P = 2v_0\sin 15°$.

5. Второй способ: мгновенный центр вращения. Точка касания K покоится — в данный момент диск поворачивается вокруг K с угловой скоростью $\omega = v_0/R$, и $v_P = \omega\cdot KP$. Радиус OK перпендикулярен плоскости, то есть отклонён от вертикали OP на 30° (рисунок 4). Хорда KP в равнобедренном треугольнике KOP:

$$KP = 2R\sin 15°, \qquad v_P = \frac{v_0}{R}\cdot 2R\sin 15° = 2v_0\sin 15°,$$

$$2v_0\sin 15° = v_0\sqrt{2-2\cos 30°} = \sqrt{2-\sqrt{3}}\,v_0.$$



Мгновенный центр вращения — точка касания K; угол $KOP = 30°$, скорость $\vec{v}_P$ перпендикулярна хорде KP.

Обратите внимание. Нижняя точка диска на наклонной плоскости — не точка касания. У точки касания скорость ноль, а у нижней точки, лежащей рядом, — небольшая, но не нулевая: $\approx 0{,}52\,v_0$.

Ответ:

$$v_P = \sqrt{(v_0 - v_0\cos 30°)^2 + (v_0 \sin 30°)^2} = \sqrt{2-\sqrt{3}}\,v_0 \approx 0{,}52\,v_0.$$

Проверка. Размерность — скорость. Предел горизонтальной плоскости (0° вместо 30°): нижняя точка совпадает с точкой касания, формула шага 3 даёт $v_{Px} = 0$, $v_{Py} = 0$ — верно. python: $\sqrt{2-\sqrt{3}} = 0{,}51764 = 2\sin 15°$; вектор $\vec{v}_P = (-0{,}134;\ 0{,}5)$ перпендикулярен $\vec{KP} = (-0{,}45;\ -0{,}121)$, скалярное произведение 0 — способы согласованы.

Ответ. $v = \sqrt{2-\sqrt{3}}\,v_0 \approx 0{,}52\,v_0$.