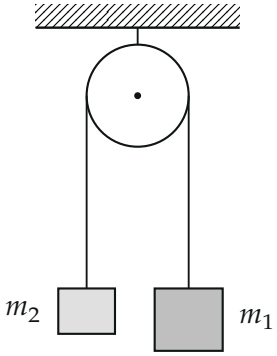
Грузы на блоке: время

Задача 2. [Курчатов 2016/17, 10 класс, задача 2] Невесомая нерастяжимая нить перекинута через идеальный неподвижный блок. К концам нити подвешены небольшие грузы: к правому — груз массой m_1, к левому — груз массой m_2, $m_1 > m_2$. Изначально грузы удерживают неподвижно на одном уровне, затем их отпускают. Через какое время t после начала движения грузов расстояние между ними по вертикали составит h? Ускорение свободного падения g, трение пренебрежимо мало.



Поясняющий рисунок: грузы на нити через блок в начальный момент, на одном уровне (по верхним краям).

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на динамику связанных тел. Правый груз тяжелее и пойдёт вниз, левый — вверх, с одинаковым по модулю постоянным ускорением: их связывает нерастяжимая нить. Ускорение находим из второго закона Ньютона для каждого груза. Затем кинематика: грузы расходятся по вертикали, и расстояние между ними растёт вдвое быстрее перемещения каждого.

Обозначения. T — сила натяжения нити; a — модуль ускорения грузов; ось y — вертикально вверх; y_1, y_2 — координаты правого и левого груза, в начале обе равны нулю.

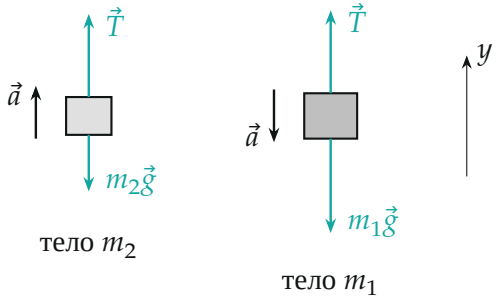
1. Связи: нить и блок. Нить нерастяжима — на сколько опустился правый груз, на столько поднялся левый; ускорения равны по модулю и противоположны: $a_{1y} = -a$, $a_{2y} = +a$. Блок идеальный (невесомый, без трения), нить невесомая — натяжение по всей нити одно, T.

2. Второй закон Ньютона для каждого груза в проекции на ось y. На груз действуют сила тяжести вниз и натяжение нити вверх (рисунок 2):

$$\begin{cases} T - m_1 g = -m_1 a, \\ T - m_2 g = m_2 a. \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое, T исчезает:

$$(m_1 - m_2)\, g = (m_1 + m_2)\, a, \qquad a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, g.$$

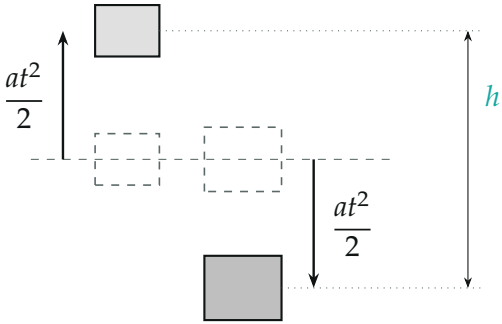


Силы на каждый груз: натяжение $\vec{T}$ одно и то же, $m_1 g > T > m_2 g$; ускорения равны по модулю и противоположны.

3. Расстояние между грузами. Грузы стартуют из покоя с одного уровня и движутся равноускоренно в разные стороны:

$$y_1 = -\frac{at^2}{2}, \qquad y_2 = \frac{at^2}{2}, \qquad h = y_2 - y_1 = 2 \cdot \frac{at^2}{2} = at^2.$$

Относительно правого груза левый движется с ускорением $2a$ (рисунок 3).

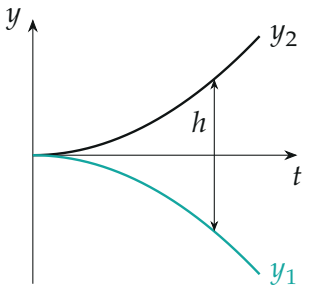


Через время t левый груз поднялся, правый опустился на одно и то же расстояние $at^2/2$ (пунктир — начальное положение); расстояние между ними по вертикали h.

4. Время.

$$t = \sqrt{\frac{h}{a}} = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)\,h}{(m_1 - m_2)\,g}}.$$

Графики координат (рисунок 4) — две параболы, симметричные относительно оси времени; вертикальный отрезок между ними — расстояние h.



Координаты грузов: $y_2 = at^2/2$, $y_1 = -at^2/2$; в искомый момент расстояние между параболами равно h.

Обратите внимание. h — расстояние между грузами, а не путь одного груза: каждый проходит только $h/2$. Подставив $h = at^2/2$, получили бы время, в $\sqrt{2}$ раз меньше верного.

Ответ:

$$t = \sqrt{\frac{h}{a}}, \quad a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, g; \qquad t = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)\, h}{(m_1 - m_2)\, g}}.$$

Проверка. Размерность: $\sqrt{\text{м}/(\text{м}/\text{с}^2)}$ — секунды. Пределы: $m_1 \to m_2$ — $t \to \infty$, равные грузы в равновесии и не расходятся; $m_2 \to 0$ — $a \to g$, правый груз падает свободно, левый (невесомый) поднимается так же, $h = gt^2$. Второй способ — закон сохранения энергии: при расхождении на h каждый груз сместился на $h/2$, $\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = (m_1 - m_2)\, g\, \frac{h}{2}$, и $v^2 = 2a \cdot \frac{h}{2}$ даёт то же a.

Ответ. $t = \sqrt{\dfrac{(m_1 + m_2)\, h}{(m_1 - m_2)\, g}}$.