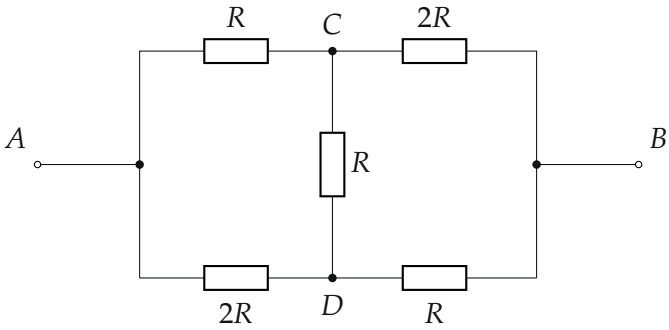
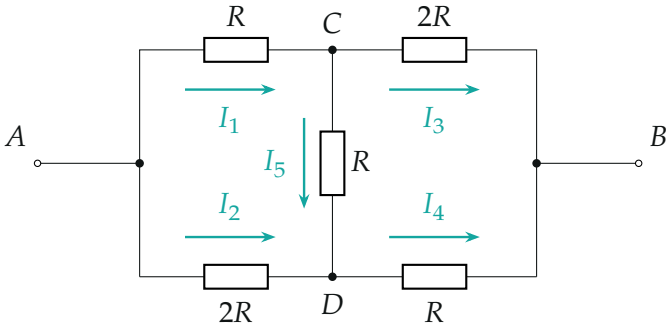
Сопротивление мостовой цепи

Задача 5. [Курчатов 2016/17, 10 класс, задача 5] Найдите сопротивление между точками A и B участка цепи, схема которого показана на рисунке. Сопротивлением соединительных проводов можно пренебречь. Найдите общее сопротивление участка AB цепи и силу тока на участке CD, если напряжение между точками A и B равно U.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на расчёт разветвлённой цепи постоянного тока — несимметричный мост. Мост не сбалансирован ($R/2R \neq 2R/R$), ток через перемычку CD идёт, и последовательно-параллельными упрощениями схему не свернуть. Работают правила Кирхгофа. Удобнее всего метод узловых потенциалов: неизвестных всего два — потенциалы точек C и D, а все токи выражаются через них законом Ома. Сопротивление участка — напряжение, делённое на полный втекающий ток.

Обозначения. Потенциал точки B примем за ноль, тогда $\varphi_A = U$; φ_C, φ_D — потенциалы узлов C и D; токи I_1 ($A \to C$), I_2 ($A \to D$), I_3 ($C \to B$), I_4 ($D \to B$), I_5 ($C \to D$) — рисунок 2; I — полный ток через участок.



Токи в ветвях; направления выбраны наугад — знак ответа покажет, верно ли.

1. Первое правило Кирхгофа для узлов C **и** D (сколько втекает, столько вытекает), токи по закону Ома для участков:

$$\begin{cases} I_1 = I_3 + I_5, \\ I_2 + I_5 = I_4; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{U-\varphi_C}{R} = \dfrac{\varphi_C}{2R} + \dfrac{\varphi_C-\varphi_D}{R}, \\ \dfrac{U-\varphi_D}{2R} + \dfrac{\varphi_C-\varphi_D}{R} = \dfrac{\varphi_D}{R}. \end{cases}$$

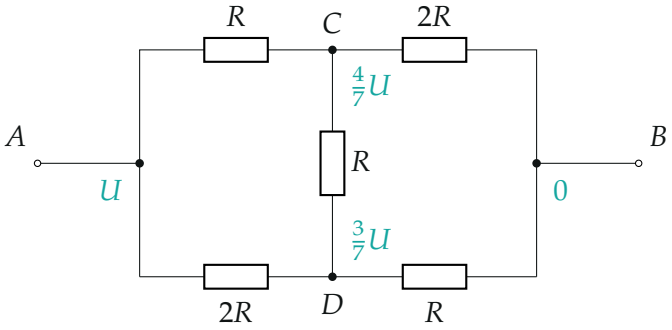
2. Решение системы. Умножим на $2R$ и приведём подобные:

$$\begin{cases} 5\varphi_C - 2\varphi_D = 2U, \\ 2\varphi_C - 5\varphi_D = -U. \end{cases}$$

Сложим и вычтем уравнения: $7(\varphi_C - \varphi_D) = U$ и $3(\varphi_C + \varphi_D) = 3U$, откуда

$$\varphi_C = \frac{4}{7}U, \qquad \varphi_D = \frac{3}{7}U.$$

Потенциалы на схеме — рисунок 3.



Потенциалы узлов (бирюзой), $\varphi_B = 0$. Ток в перемычке идёт от C к D: потенциал C выше.

3. Токи в ветвях: закон Ома для участка цепи.

$$I_1 = \frac{U - \frac{4}{7}U}{R} = \frac{3U}{7R}, \quad I_2 = \frac{U - \frac{3}{7}U}{2R} = \frac{2U}{7R}, \quad I_3 = \frac{\frac{4}{7}U}{2R} = \frac{2U}{7R},$$

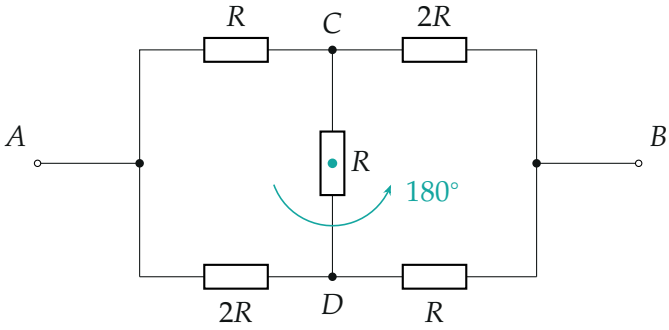
$$I_4 = \frac{\frac{3}{7}U}{R} = \frac{3U}{7R}, \qquad I_5 = \frac{\varphi_C - \varphi_D}{R} = \frac{U}{7R}.$$

Проверка узлов: $I_1 = I_3 + I_5$ — $3 = 2 + 1$; $I_2 + I_5 = I_4$ — $2 + 1 = 3$ (в единицах $U/7R$). Все токи положительны — направления угаданы.

4. Сопротивление участка. Полный ток, втекающий в A:

$$I = I_1 + I_2 = \frac{5U}{7R}, \qquad R_{AB} = \frac{U}{I} = \frac{7}{5}R.$$

5. Второй способ: симметрия. Повернём схему на 180° вокруг середины перемычки CD: A и B меняются местами, C и D тоже, а резисторы ложатся на резисторы того же сопротивления (рисунок 4). Если поменять знак напряжения, картина токов повторится: значит, $I_1 = I_4$, $I_2 = I_3$ и $\varphi_C + \varphi_D = U$ — это и есть второе уравнение шага 2, сразу. Тогда достаточно одного контура $ACDA$ (второе правило Кирхгофа): $I_1R + (I_1 - I_2)R - I_2 \cdot 2R = 0$, $I_2 = \frac{2}{3}I_1$; и $U = I_1R + I_3 \cdot 2R = \frac{7}{3}I_1R$ — те же числа.



Поворот на 180° *вокруг середины* CD *переводит схему в себя* ($R \leftrightarrow R$, $2R \leftrightarrow 2R$)*, меняя местами* $A \leftrightarrow B$ *и* $C \leftrightarrow D$.

Обратите внимание. Сопротивление $\frac{7}{5}R$ меньше, чем у двух ветвей $3R \parallel 3R = \frac{3}{2}R$ без перемычки: перемычка открывает ещё один путь току, а дополнительный путь сопротивление только уменьшает. Хорошая проверка порядка величины.

Ответ:

$$R_{AB} = \frac{U}{I_1 + I_2} = \frac{7}{5}R, \qquad I_{CD} = \frac{\varphi_C - \varphi_D}{R} = \frac{U}{7R}.$$

Проверка. Размерность: U/R — ток. Мощность: $UI = \frac{5}{7}\frac{U^2}{R}$ и $\sum I_k^2 R_k = \frac{U^2}{49R}(9 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 9 + 1) = \frac{35U^2}{49R}$ — совпадает. python (sympy) решил систему узловых уравнений: $\varphi_C = 4U/7$, $\varphi_D = 3U/7$, $R_{AB} = 7R/5$.

Ответ. $R_{AB} = \frac{7}{5}R$; $I_{CD} = \frac{U}{7R}$.