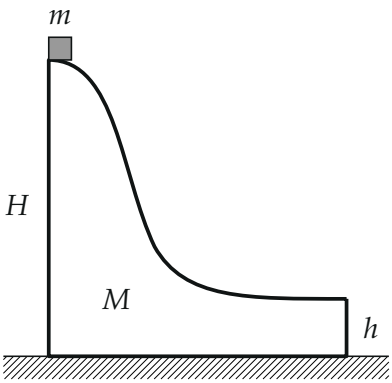
Шайба на подвижной горке

Задача 1. [Курчатов 2016/17, 11 класс, задача 1] Небольшая шайба массой m скатывается с вершины гладкой горки массой M и высотой H. Горка находится на гладкой поверхности. На какой высоте h над поверхностью должен находиться нижний горизонтальный участок горки для того, чтобы шайба упала на поверхность на максимальном расстоянии от точки поверхности, над которой произошёл отрыв? Чему равно это расстояние, если $m : M = 19 : 81$, а высота горки $H = 1$ м?



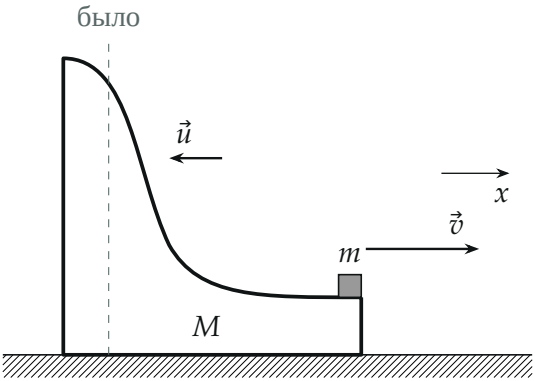
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на законы сохранения в системе «шайба + горка» и полёт тела, брошенного горизонтально. Пока шайба скользит, она толкает горку, и горка отъезжает назад — часть энергии уходит горке. Чем ниже нижний участок (h меньше), тем быстрее шайба на нём, но тем короче полёт; чем выше, тем дольше полёт, но меньше скорость. Есть наилучшая середина — её и ищем.

Обозначения. v — скорость шайбы относительно земли в момент отрыва (горизонтальная), u — скорость горки в этот момент; ось x — горизонтально по движению шайбы, ось y — вверх; τ — время полёта, L — дальность от точки под краем горки до точки падения.

1. Закон сохранения импульса системы «шайба + горка» в проекции на ось x. Зачем: связать скорость горки со скоростью шайбы. Внешние силы — тяжести и реакции гладкой поверхности — вертикальны,

трения нет, поэтому проекция импульса на ось x сохраняется; сначала всё покоилось. На нижнем горизонтальном участке обе скорости горизонтальны (рисунок 2):

$$0 = mv - Mu \quad \Rightarrow \quad u = \frac{m}{M}v.$$



Момент отрыва: шайба на краю нижнего участка со скоростью $\vec{v}$, горка отъехала назад (пунктир — её начальное положение) и движется со скоростью $\vec{u}$.

2. Закон сохранения механической энергии системы. Поверхности гладкие, работу совершают только силы тяжести (силы реакции между шайбой и горкой в сумме работы не совершают — поверхность гладкая, они перпендикулярны относительной скорости). Шайба опустилась с высоты H до h:

$$mgH = mgh + \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}.$$

Подставим u из шага 1:

$$mg(H-h) = \frac{mv^2}{2}\left(1 + \frac{m}{M}\right) \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{2gM(H-h)}{M+m}.$$

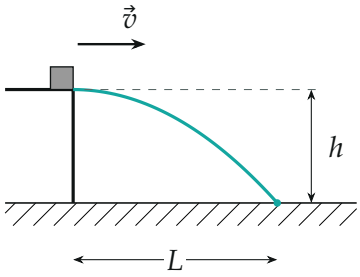
Без горки (горка закреплена, $M \to \infty$) было бы $v^2 = 2g(H-h)$; подвижная горка забирает долю $\frac{m}{M+m}$ энергии.

3. Полёт шайбы: тело, брошенное горизонтально. После отрыва на шайбу действует только сила тяжести. Начальная скорость горизонтальна, высота h (рисунок 3). По оси y — свободное падение без начальной скорости, по оси x — равномерное движение:

$$h = \frac{g\tau^2}{2} \;\Rightarrow\; \tau = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

$$L = v\tau = \sqrt{\frac{2gM(H-h)}{M+m}\cdot\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{\frac{M}{M+m}h(H-h)}.$$

Ускорение g сократилось: дальность определяется только геометрией и отношением масс.

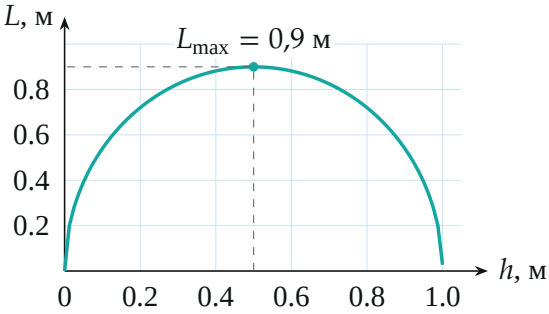


Полёт шайбы после отрыва: горизонтальная начальная скорость v, падение с высоты h; траектория построена по формуле $y = h - \frac{gx^2}{2v^2}$ при $h = 0{,}5$ м.

4. Максимум дальности. Множитель $\sqrt{M/(M+m)}$ от h не зависит; максимизируем $f(h) = h(H-h)$. Это парабола ветвями вниз с корнями $h = 0$ и $h = H$, её вершина посередине:

$$h = \frac{H}{2}, \qquad f_{\max} = \frac{H^2}{4}, \qquad L_{\max} = 2\sqrt{\frac{M}{M+m}\cdot\frac{H^2}{4}} = H\sqrt{\frac{M}{M+m}}.$$

Для $m : M = 19 : 81$: $\frac{M}{M+m} = \frac{81}{100}$, $L_{\max} = 0{,}9H = 0{,}9$ м. График $L(h)$ — рисунок 4.



Дальность полёта от высоты нижнего участка при $H = 1$ м, $m : M = 19 : 81$: $L = 1{,}8\sqrt{h(1-h)}$ м, максимум при $h = 0{,}5$ м.

Обратите внимание. Дальность отсчитывают от точки поверхности под местом отрыва, то есть от края горки в момент отрыва, — поэтому нужна скорость шайбы относительно земли, а не относительно горки. Горка к этому моменту отъехала назад, но в ответ это не входит.

Ответ:

$$h = \frac{H}{2} = 0{,}5 \text{ м}, \qquad L_{max} = H\sqrt{\frac{M}{M+m}} = 0{,}9 \text{ м}.$$

Проверка. Размерность: L — в метрах. Предел $M \to \infty$ (горка закреплена): $L_{max} \to H$ — известный результат для неподвижной горки. Предел $h \to 0$ или $h \to H$: $L \to 0$ — нет полёта или нет скорости. Численно (python, $g = 10$): $v = 2{,}846$ м/с, $u = 0{,}668$ м/с, $\tau = 0{,}316$ с, $v\tau = 0{,}900$ м; энергия $mgH = 190$ (в единицах m из $19 + 81$) совпала с $mgh + \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} = 190$.

Ответ. $h = \frac{H}{2} = 0{,}5$ м; $L_{max} = H\sqrt{\frac{M}{M+m}} = 0{,}9$ м.