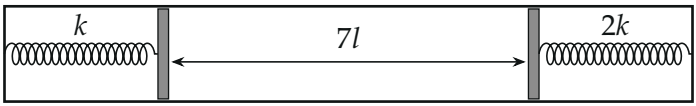
Газ между поршнями на пружинах

Задача 2. [Курчатов 2016/17, 11 класс, задача 2] К боковым стенкам горизонтально расположенного цилиндра с помощью пружин прикреплены два лёгких подвижных поршня, как показано на рисунке. Жёсткость левой пружины равна k, правой — $2k$, пружины подчиняются закону Гука и находятся в вакууме. Между поршнями находится идеальный газ при температуре $T_1 = 350$ K, расстояние между поршнями $7l$, длина каждой из пружин $3l$. После того, как газ нагрели до температуры $T_2 = 600$ K, длина правой пружины уменьшилась до $2l$. Найдите длины пружин в недеформированном состоянии.



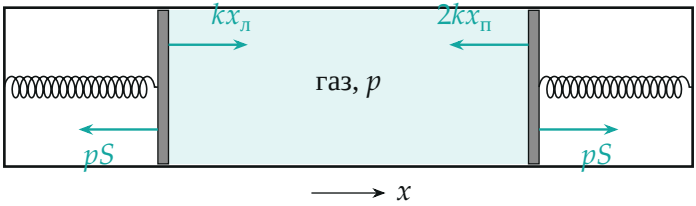
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на уравнение состояния идеального газа и равновесие поршней. Поршни лёгкие, поэтому сила давления газа на каждый поршень в точности уравновешена своей пружиной. Газ давит на оба поршня с одинаковой силой, значит, и пружины сжаты одинаковыми силами — более мягкая (левая) сжата вдвое сильнее. При нагревании давление растёт, пружины сжимаются дальше, объём растёт. Сжатие правой пружины в конце известно — отсюда и объём, и рост давления, и начальные деформации.

Обозначения. S — площадь поршня, p_1, p_2 — давление газа до и после нагрева; $x_л$, $x_п$ — начальные сжатия левой и правой пружин; $L_л$, $L_п$ — их длины без деформации; ось x — вправо.

1. Равновесие лёгких поршней: второй закон Ньютона в проекции на ось x при нулевой массе. Пружины в вакууме: на поршень действуют только газ изнутри и пружина снаружи (рисунок 2). Газ толкает поршни наружу, значит, пружины сжаты:

$$pS = kx_л, \qquad pS = 2kx_п \quad \Rightarrow \quad x_л = 2x_п.$$

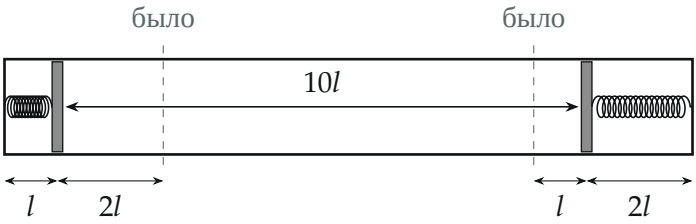
Это верно в любом равновесном состоянии, поэтому и *изменения* сжатий связаны так же: $\Delta x_л = 2\Delta x_п$.



Силы, действующие на лёгкие поршни: давление газа pS наружу (у левого — влево, у правого — вправо) и упругость сжатой пружины внутрь; стрелки сдвинуты по высоте, чтобы не сливались.

2. Сжатия после нагрева. Правая пружина укоротилась с $3l$ до $2l$: $\Delta x_п = l$. Тогда $\Delta x_л = 2l$, левая пружина стала длиной $3l - 2l = l$. Поршни разошлись на $l + 2l$, расстояние между ними (рисунок 3):

$$7l + 2l + l = 10l.$$



После нагрева: левый поршень сдвинулся на $2l$, правый на l (пунктир — прежние положения), между поршнями $10l$.

3. Уравнение состояния идеального газа (Менделеева — Клапейрона). Количество газа неизменно, объём пропорционален расстоянию между поршнями: $pV/T = \text{const}$,

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{V_1}{V_2} = \frac{600}{350} \cdot \frac{7l}{10l} = \frac{6}{5} = 1{,}2.$$

4. Начальные сжатия: закон Гука. Сила левой пружины пропорциональна давлению: $kx_л = p_1 S$, $k(x_л + 2l) = p_2 S$. Делим:

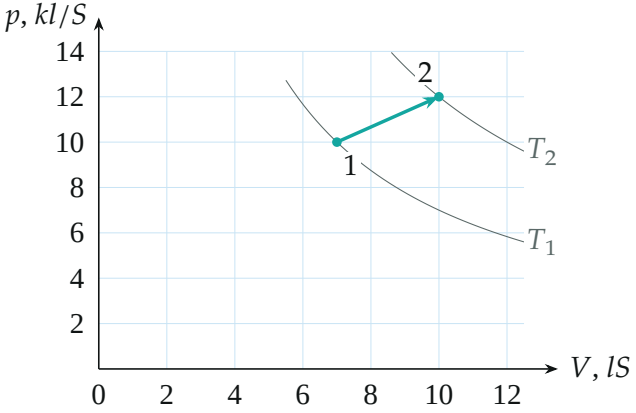
$$\frac{x_л + 2l}{x_л} = 1{,}2 \quad \Rightarrow \quad x_л = 10l, \qquad x_п = \frac{x_л}{2} = 5l.$$

Проверка правой пружиной: $\frac{5l+l}{5l} = 1{,}2$ — то же.

5. Длины без деформации. Пружины сжаты, значит, без деформации они длиннее:

$$L_л = 3l + x_л = 13l, \qquad L_п = 3l + x_п = 8l.$$

Как идёт нагрев на диаграмме p–V. В единицах kl/S для давления и lS для объёма: $p_1 = 10$, $V_1 = 7$; $p_2 = 12$, $V_2 = 10$. При раздвижении поршней на $\Delta x_л + \Delta x_п = 1{,}5\,\Delta x_л$ давление растёт на $k\Delta x_л/S$, так что процесс — отрезок прямой с наклоном $\frac{2}{3}$ (рисунок 4). Проверка: $\frac{p_2V_2}{p_1V_1} = \frac{120}{70} = \frac{600}{350}$.



Нагрев на диаграмме p–V: отрезок $1 \to 2$ с наклоном $2/3$; серые кривые — изотермы T_1 и T_2 ($pV = 70$ и 120).

Обратите внимание. Деформации пружин в начале неизвестны, а длина $3l$ — это уже сжатая пружина. Удобно работать с *приращениями*: они связаны так же, как сами сжатия, потому что приращение силы давления у обоих поршней одно.

Ответ:

$$L_л = 3l + \frac{2l}{\frac{T_2}{T_1}\cdot\frac{7}{10} - 1} = 13l, \qquad L_п = 8l.$$

Проверка. Размерность: длины в l. Самосогласованность (python): начальные силы $k\cdot 10l = 2k\cdot 5l = 10kl$, конечные $k\cdot 12l = 2k\cdot 6l = 12kl$,

отношение $1{,}2 = \frac{600 \cdot 7}{350 \cdot 10}$. Знак: $x_л > 0$ только при $\frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{7}{10} > 1$ — давление после нагрева должно вырасти, иначе пружины не сжались бы сильнее; здесь $1{,}2 > 1$.

Ответ. Левая пружина без деформации $13l$, правая — $8l$.