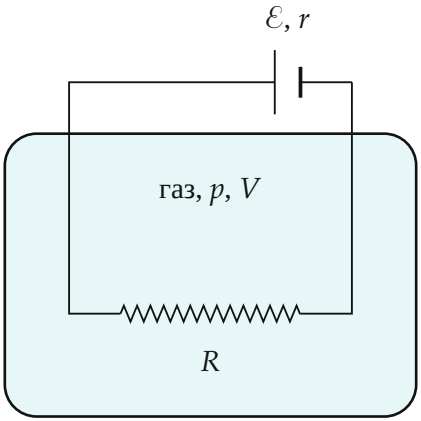
Нагреватель в баллоне с газом

Задача 3. [Курчатов 2016/17, 11 класс, задача 3] Электронагреватель с сопротивлением 90 Ом помещён в баллон, в котором находится одноатомный идеальный газ под давлением $3 \cdot 10^5$ Па. Электронагреватель на 5 минут подключают к источнику постоянного напряжения с ЭДС 100 В и внутренним сопротивлением 10 Ом, после чего давление в баллоне становится равным $6 \cdot 10^5$ Па. Определите объём баллона. Газ не обменивается теплотой с окружающей средой.



Поясняющий рисунок: нагреватель R в баллоне с газом подключён к источнику с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на закон Ома для полной цепи, закон Джоуля — Ленца и первое начало термодинамики. Ток выделяет тепло в нагревателе; баллон жёсткий (объём постоянен) и теплоизолирован, поэтому газ работы не совершает и всё тепло идёт во внутреннюю энергию. Для одноатомного газа внутренняя энергия $\frac{3}{2}pV$ — при постоянном V её рост виден прямо по росту давления.

Обозначения. $R = 90$ Ом, $\mathcal{E} = 100$ В, $r = 10$ Ом, $t = 5$ мин $= 300$ с, $p_1 = 3 \cdot 10^5$ Па, $p_2 = 6 \cdot 10^5$ Па, $\Delta p = p_2 - p_1$; I — ток, Q — тепло, выделившееся в нагревателе, U — внутренняя энергия газа, V — объём баллона.

1. Ток: закон Ома для полной цепи. Нагреватель и внутреннее сопротивление источника соединены последовательно (рисунок 2):

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} = \frac{100\ \text{В}}{90\ \text{Ом} + 10\ \text{Ом}} = 1\ \text{А}.$$

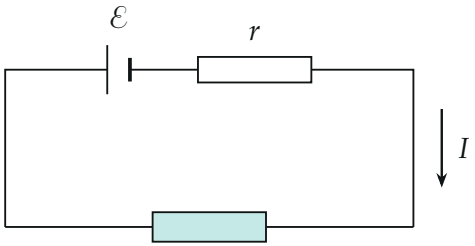
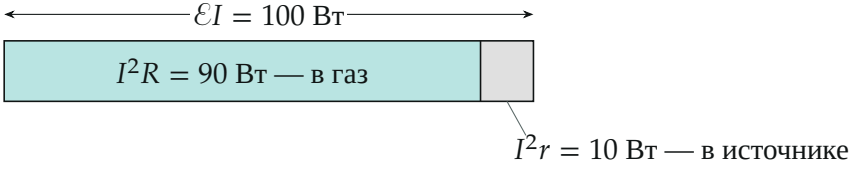


Схема цепи: источник с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r, нагреватель R; ток I один на всю цепь.

2. Тепло в нагревателе: закон Джоуля — Ленца. Тепло выделяется и в источнике (I^2r), но в баллон идёт только тепло нагревателя:

$$Q = I^2Rt = (1\ \text{А})^2 \cdot 90\ \text{Ом} \cdot 300\ \text{с} = 27\,000\ \text{Дж}.$$

Мощность $P = I^2R = 90$ Вт из полных $\mathcal{E}I = 100$ Вт (рисунок 3).



Мощность источника: 90 % выделяется в нагревателе внутри баллона, 10 % — на внутреннем сопротивлении.

3. Первое начало термодинамики для газа. $Q = \Delta U + A$. Объём баллона постоянен — газ работы не совершает, $A = 0$; теплообмена со средой нет, поэтому газ получает только тепло нагревателя:

$$Q = \Delta U.$$

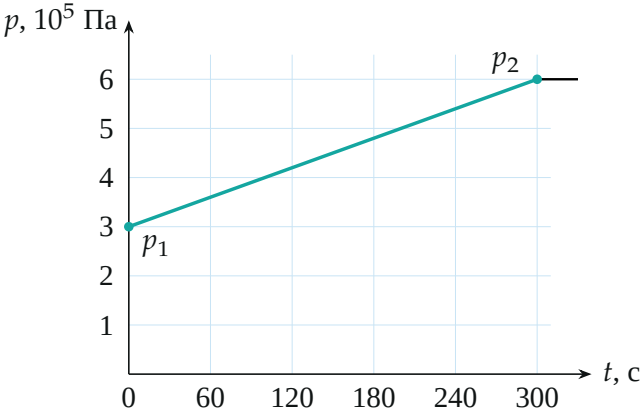
4. Внутренняя энергия одноатомного газа. $U = \frac{3}{2}\nu RT$, а по уравнению Менделеева — Клапейрона $\nu RT = pV$, так что $U = \frac{3}{2}pV$. При $V = \text{const}$:

$$\Delta U = \frac{3}{2}V\Delta p \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{3}{2}V\Delta p.$$

5. Объём баллона.

$$V = \frac{2Q}{3\Delta p} = \frac{2 \cdot 27\,000\ \text{Дж}}{3 \cdot 3 \cdot 10^5\ \text{Па}} = 0{,}06\ \text{м}^3 = 60\ \text{л}.$$

Давление растёт с постоянной скоростью $\frac{dp}{dt} = \frac{2P}{3V} = \frac{2 \cdot 90}{3 \cdot 0{,}06} = 1000$ Па/с (рисунок 4).



Давление газа от времени: при постоянной мощности нагревателя и постоянном объёме оно растёт линейно, на 1000 Па в секунду; после отключения ($t = 300$ с) остаётся постоянным.

Обратите внимание. В газ идёт только тепло, выделившееся на R: тепло I^2rt остаётся в источнике снаружи баллона. Брать полную работу источника $\mathcal{E}It = 30$ кДж — ошибка: получилось бы $V = 67$ л.

Ответ:

$$V = \frac{2\mathcal{E}^2Rt}{3(R+r)^2(p_2 - p_1)} = 6 \cdot 10^{-2}\ \text{м}^3 = 60\ \text{л}.$$

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{В}^2\cdot\text{Ом}\cdot\text{с}}{\text{Ом}^2\cdot\text{Па}}=\dfrac{\text{Вт}\cdot\text{с}}{\text{Па}}=\dfrac{\text{Дж}}{\text{Н/м}^2}=\text{м}^3$. Численно (python): $\frac{2\cdot10^4\cdot90\cdot300}{3\cdot10^4\cdot3\cdot10^5}=0{,}06\ \text{м}^3$. Обратный счёт: $\frac{3}{2}\cdot0{,}06\cdot3\cdot10^5=27\,000$ Дж $=Q$. У организаторов в промежуточной записи числитель 18 000 Дж вместо $2Q=54\,000$ Дж (опечатка), ответ 60 л верный.

Ответ. $V=\dfrac{2I^2Rt}{3(p_2-p_1)}=0{,}06\ \text{м}^3=60$ л.