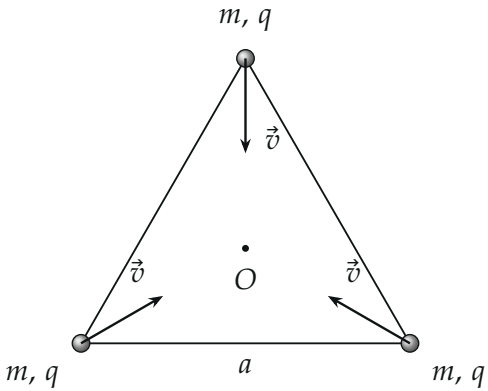
Три заряженных шарика

Задача 4. [Курчатов 2016/17, 11 класс, задача 4] Три одинаковых маленьких шарика, каждый из которых имеет массу m и несёт заряд q, удерживают в вершинах правильного треугольника с длиной стороны a. В некоторый момент все шарики отпускают, сообщая каждому скорость v, направленную к центру треугольника. Какой путь пройдёт каждый из шариков к тому моменту, когда его скорость станет равной нулю?



Поясняющий рисунок: заряженные шарики в вершинах треугольника, O — его центр; начальные скорости направлены к центру.

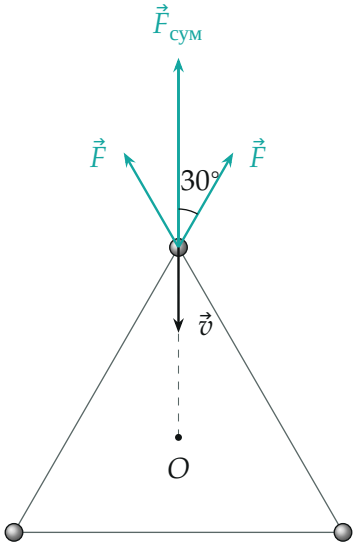
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на закон сохранения энергии системы зарядов. Шарики отталкиваются, а летят навстречу друг другу — поэтому тормозятся. Внешних сил нет, электрические силы потенциальны, значит, сумма кинетической энергии шариков и энергии их взаимодействия сохраняется. Симметрия даёт главное: все три шарика всё время в одинаковом положении, движутся по прямым к центру и останавливаются одновременно, когда треугольник сожмётся до некоторой стороны b. Расстояние, пройденное шариком, — разность расстояний от вершины до центра в начале и в конце.

Обозначения. O — центр треугольника; b — сторона треугольника в момент остановки; r_0 и r — расстояния от шарика до центра в начале и в момент остановки; s — искомый путь; $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

1. Симметрия: куда и как движутся шарики. Поворот на 120° вокруг O переводит треугольник в себя вместе с зарядами и начальными скоростями. Значит, в любой момент шарики — вершины правильного треугольника с центром O. Сила, действующая на шарик со стороны двух других, — сумма двух равных по модулю сил отталкивания $F = \dfrac{kq^2}{x^2}$ (x — текущая сторона), направленных вдоль сторон под углом 60° друг к другу (рисунок 2). Их сумма направлена по биссектрисе, то есть от центра:

$$F_{\text{сум}} = 2F\cos 30^\circ = \sqrt{3}\,\frac{kq^2}{x^2}.$$

Скорость направлена к центру, сила — от центра, поэтому шарик движется по прямой к O и тормозится. Скорость обращается в ноль у всех трёх одновременно.



Силы на верхний шарик: две силы отталкивания $\vec{F}$ вдоль продолжений сторон; их сумма направлена от центра, против скорости.

2. Энергия системы в начале и в момент остановки. Энергия взаимодействия трёх зарядов — сумма по трём парам; все расстояния между

шариками равны стороне треугольника:

$$W_0 = 3\,\frac{kq^2}{a}, \qquad W = 3\,\frac{kq^2}{b}.$$

Кинетическая энергия в начале $3 \cdot \dfrac{mv^2}{2}$, в момент остановки — ноль.

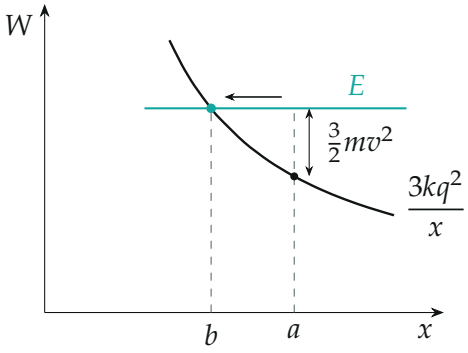
3. Закон сохранения энергии системы трёх шариков (внешних сил нет, работают только электрические силы между шариками):

$$3\,\frac{mv^2}{2} + 3\,\frac{kq^2}{a} = 3\,\frac{kq^2}{b}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{mv^2}{2kq^2} = \frac{2kq^2 + mv^2 a}{2kq^2 a}, \qquad b = \frac{2kq^2 a}{2kq^2 + mv^2 a}.$$

Графически (рисунок 3): энергия взаимодействия $3kq^2/x$ растёт при сжатии треугольника; шарики останавливаются там, где она сравнялась с полной энергией системы.

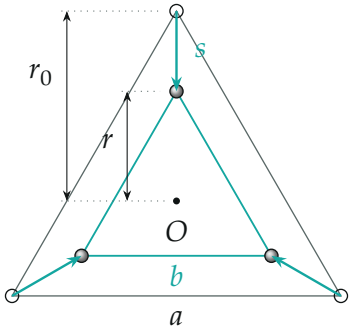


Энергия взаимодействия как функция стороны x; горизонталь — полная энергия E. При $x = a$ разность — кинетическая энергия; остановка при $x = b$.

4. Путь шарика: геометрия. Расстояние от вершины правильного треугольника до центра равно $\dfrac{2}{3}$ высоты: $r_0 = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} a = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, в конце

$r = \dfrac{b}{\sqrt{3}}$ (рисунок 4). Шарик движется по прямой без поворотов, поэтому путь

$$s = r_0 - r = \frac{a-b}{\sqrt{3}}, \qquad a - b = a - \frac{2kq^2 a}{2kq^2 + mv^2 a} = \frac{mv^2 a^2}{2kq^2 + mv^2 a}.$$



Начальный треугольник (серый, сторона a) и треугольник в момент остановки (бирюзовый, сторона b); каждый шарик проходит по прямой к центру путь $s = r_0 - r$.

Обратите внимание. Энергия взаимодействия трёх зарядов — три слагаемых, по одному на пару, а не по одному на заряд с множителем $\frac{1}{2}$ где попало. Здесь множитель 3 сокращается с тремя кинетическими энергиями, но в задачах с неравными зарядами ошибка в числе пар сразу портит ответ.

Ответ:

$$s = \frac{a-b}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{mv^2 a^2}{2kq^2 + mv^2 a} = \frac{2\sqrt{3}\,\pi\varepsilon_0\, mv^2 a^2}{3(q^2 + 2\pi\varepsilon_0\, mv^2 a)}.$$

Проверка. Размерность: $\dfrac{mv^2 a^2}{mv^2 a}$ — длина, и kq^2 = энергия·длина, как $mv^2 a$. Пределы: $v \to 0$ — $s \to 0$, шарики сразу останавливаются; $q \to 0$ — $s \to a/\sqrt{3}$, шарики без отталкивания доходят до центра (тогда тормозиться им нечем — формула даёт верхнюю границу пути). python:

при $kq^2 = 1$, $a = 1$, $mv^2 = 1$ получаем $b = 2/3$ и численное интегрирование уравнения движения $m\ddot{r} = \sqrt{3}\,kq^2/(\sqrt{3}r)^2$ даёт остановку при $r = 0{,}385 = b/\sqrt{3}$.

Ответ. $s = \dfrac{2\sqrt{3}\,\pi\varepsilon_0\, mv^2a^2}{3(q^2 + 2\pi\varepsilon_0\, mv^2a)}$.