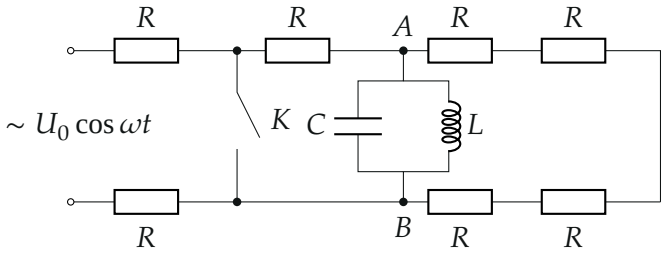
Цепь переменного тока с LC и ключом

Задача 5. [Курчатов 2016/17, 11 класс, задача 5] В электрической цепи, схема которой показана на рисунке, все резисторы одинаковые, и сопротивление каждого из них равно R. Цепь очень давно подключена к источнику переменного напряжения $U(t) = U_0 \cos \omega t$. Ёмкость C конденсатора и индуктивность L катушки подобраны таким образом, что выполняется соотношение: $\omega L = \dfrac{1}{\omega C}$.



1. Найдите максимальное напряжение на конденсаторе.
2. Найдите максимальную силу тока, протекающего через катушку.
3. Ключ K замыкают в момент, когда ток через катушку не течёт. Найдите количество теплоты, которое выделится в каждом из резисторов, расположенных на рисунке справа от ключа K, после его замыкания.
4. Как изменятся ответы для количеств теплоты, выделившихся в тех же резисторах, если ключ размыкают в момент, когда ток через катушку максимален?
5. Как изменятся ответы на вопросы 1), 2), 3) и 4), если катушка и конденсатор будут подключены к тем же точкам A и B не параллельно друг другу, а последовательно друг за другом?

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на установившиеся вынужденные колебания и затухание контура. Пока ключ разомкнут, всё давно установилось и колеблется с частотой источника. Условие $\omega L = 1/(\omega C)$ — резонанс: параллельный контур LC для тока частоты ω —

разрыв, последовательный — провод. После замыкания ключа источник отрезан от правой части цепи, и энергия, запасённая в контуре, целиком уходит в тепло в резисторах справа от ключа. Как она делится, решает то, что резисторы образуют две параллельные ветви между A и B.

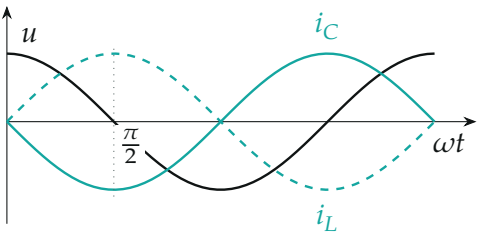
Обозначения. $X = \omega L = \dfrac{1}{\omega C}$ — сопротивление (модуль импеданса) катушки и конденсатора; $u(t)$ — напряжение между A и B; i_C, i_L — токи через конденсатор и катушку; W — энергия контура в момент переключения; Q_1 — теплота в резисторе между ключом и точкой A, Q_2 — в каждом из четырёх резисторов правой петли.

Пункт 1. Напряжение на конденсаторе.

1. Токи в контуре. Катушка и конденсатор подключены к одним и тем же точкам A и B, напряжение на них одно: $u = u_0 \cos \omega t$. Ток конденсатора $i_C = C\dfrac{du}{dt} = -\dfrac{u_0}{X}\sin \omega t$ опережает напряжение на четверть периода, ток катушки (из $L\dfrac{di_L}{dt} = u$) $i_L = \dfrac{u_0}{X}\sin \omega t$ отстаёт на четверть периода (рисунок 2). Амплитуды равны, фазы противоположны:

$$i_C + i_L = 0.$$

В провода, ведущие к A и B, ток из контура не выходит: для внешней цепи контур — разрыв.



Напряжение и на контуре и токи: i_C (сплошная бирюзовая) опережает и на $\pi/2$, i_L (штриховая) отстаёт на $\pi/2$; они равны по модулю и противоположны в каждый момент.

2. Ток во внешней цепи. Ток через контур в цепь не идёт, поэтому все семь резисторов соединены последовательно (рисунок 3): по закону Ома для всей цепи

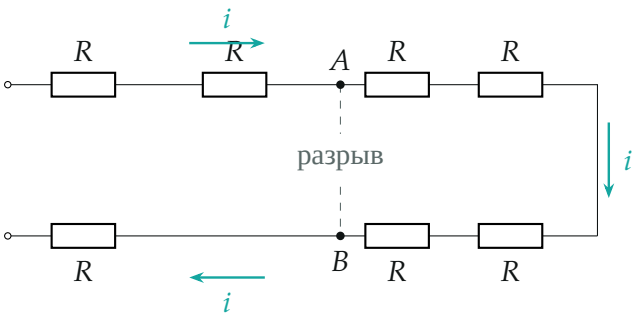
$$i(t) = \frac{U_0 \cos \omega t}{7R}.$$

Напряжение между A и B — это напряжение на четырёх резисторах правой петли, они от A к B идут последовательно:

$$u = 4R\, i = \frac{4}{7} U_0 \cos \omega t.$$

Напряжение на конденсаторе и есть u, его амплитуда

$$U_{C\,\max} = \frac{4}{7}\, U_0.$$



Для тока частоты ω контур — разрыв: семь резисторов соединены последовательно, по всем течёт один ток i.

Пункт 2. Ток через катушку. Амплитуда тока катушки — амплитуда напряжения, делённая на $X = \omega L$:

$$I_{L\,\max} = \frac{U_{C\,\max}}{\omega L} = \frac{4U_0}{7\omega L} = \frac{4}{7}\, \omega C U_0.$$

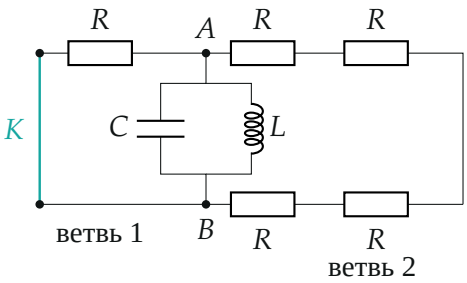
Этот ток течёт по кольцу L–C и обратно, во внешнюю цепь не выходит.

Пункт 3. Теплота после замыкания ключа.

1. Энергия контура. Ток катушки равен нулю, когда напряжение на контуре максимально ($i_L \propto \sin \omega t$, $u \propto \cos \omega t$). В этот момент вся энергия контура — в конденсаторе:

$$W = \frac{CU_{C\,\max}^2}{2} = \frac{C}{2} \cdot \frac{16U_0^2}{49} = \frac{8\,CU_0^2}{49}.$$

2. Цепь после замыкания. Ключ соединяет верхний и нижний провода слева от A и B. Источник с двумя левыми резисторами замыкается сам на себя через ключ и в правую часть больше ничего не даёт. Справа остаются контур и две ветви между A и B (рисунок 4): ветвь 1 — резистор R от A к ключу и провод от ключа к B; ветвь 2 — четыре резистора петли, $4R$. Источника энергии справа нет, колебания затухают, и вся энергия W выделяется теплом в этих пяти резисторах.



Правая часть цепи после замыкания ключа: к контуру между A и B подключены две параллельные ветви — R (через ключ) и 4R.

3. Как делится теплота. Обе ветви подключены к одним и тем же точкам A и B, напряжение на них в каждый момент одно и то же $u(t)$. Мощность в ветви — $u^2/R_{\text{ветви}}$, поэтому в каждый момент мощности относятся как $\dfrac{1}{R} : \dfrac{1}{4R} = 4 : 1$, и так же относятся выделившиеся теплоты. Ветви 1 достаётся $\frac{4}{5}W$, ветви 2 — $\frac{1}{5}W$, а внутри ветви 2 четыре одинаковых резистора с одним током делят её поровну:

$$Q_1 = \frac{4}{5}W = \frac{32\,CU_0^2}{245}, \qquad Q_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}W = \frac{2\,CU_0^2}{245}.$$

Пункт 4. Ключ замыкают при максимальном токе катушки. (В условии — «размыкают»; до этого момента ключ разомкнут, поэтому речь идёт о замыкании.) Теперь напряжение на конденсаторе ноль, и энергия — в катушке:

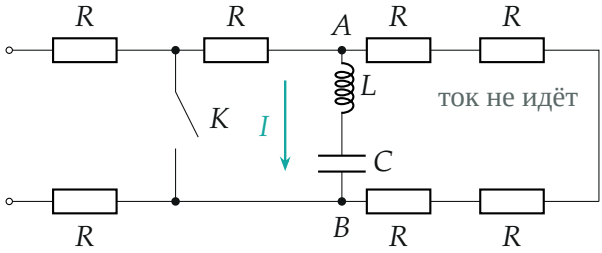
$$W' = \frac{LI_{L\max}^2}{2} = \frac{L}{2}\cdot\frac{16U_0^2}{49\,\omega^2L^2} = \frac{8U_0^2}{49\,\omega^2L} = \frac{8\,CU_0^2}{49} = W,$$

так как $\omega^2LC = 1$. Энергия контура в незатухающих колебаниях постоянна, а делится она между резисторами в том же отношении $4:1$. Ответы не изменятся.

Пункт 5. Последовательное соединение L и C.

1. Контур — провод. Ток через катушку и конденсатор теперь один, напряжения на них u_L и u_C в противофазе и равны по модулю (X одинаковы): $u_L + u_C = 0$. Между A и B — короткое замыкание, четыре резистора правой петли закорочены, ток через них не идёт (рисунок 5). Остаются три резистора: два левых и резистор от ключа к A:

$$I_{\max} = \frac{U_0}{3R}.$$



Последовательный контур при $\omega L = 1/(\omega C)$ — провод для тока частоты ω: правая петля закорочена, ток I идёт через три резистора и контур.

2. Ответы на пункты 1, 2:

$$I_{L\max} = \frac{U_0}{3R}, \qquad U_{C\max} = \frac{I_{\max}}{\omega C} = \frac{\omega L\,U_0}{3R}.$$

3. Энергия контура. Ток через катушку ноль — напряжение на конденсаторе максимально, ток максимален — напряжение ноль; оба раза

$$W_{\text{п}} = \frac{CU_{C\max}^2}{2} = \frac{C\,\omega^2 L^2 U_0^2}{18R^2} = \frac{LI_{\max}^2}{2} = \frac{LU_0^2}{18R^2}.$$

4. Деление теплоты. После замыкания ключа ток контура идёт из A в B через две параллельные ветви R и $4R$ (та же схема, что на рисунке 4, только контур последовательный). Напряжение на ветвях одно, теплоты снова делятся $4:1$, и в петле поровну на четыре:

$$Q_1 = \frac{4}{5}W_{\text{п}} = \frac{2\,LU_0^2}{45R^2}, \qquad Q_2 = \frac{1}{20}W_{\text{п}} = \frac{LU_0^2}{360R^2},$$

и для момента максимального тока — то же самое.

Обратите внимание. «Справа от ключа» не только четыре резистора петли, но и резистор между ключом и A: он первый принимает ток контура и получает $4/5$ энергии. Резисторы слева от ключа после замыкания греются током источника — об этом не спрашивают.

Ответ: параллельно: $U_{C\max} = \frac{4}{7}U_0$, $I_{L\max} = \frac{4U_0}{7\omega L}$, $Q_1 = \frac{4}{5}\cdot\frac{8CU_0^2}{49}$, $Q_2 = \frac{1}{20}\cdot\frac{8CU_0^2}{49}$; последовательно: $U_{C\max} = \frac{\omega LU_0}{3R}$, $I_{L\max} = \frac{U_0}{3R}$, $Q_1 = \frac{4}{5}\cdot\frac{LU_0^2}{18R^2}$, $Q_2 = \frac{1}{20}\cdot\frac{LU_0^2}{18R^2}$.

Проверка. Размерность: CU^2 и $LU^2/R^2 = LI^2$ — энергия. Сумма теплот: $Q_1 + 4Q_2 = \frac{32+8}{245}CU_0^2 = \frac{8}{49}CU_0^2 = W$ — энергия сохраняется. python: численно проинтегрирована цепь после замыкания ($C\dot{u} = -i_L - u/R - u/(4R)$, $L\dot{i}_L = u$, $u(0) = 4U_0/7$) — в резисторе R выделилось $0{,}800\,W$.

Ответ. 1) $U_{C\max} = \frac{4U_0}{7}$; 2) $I_{L\max} = \frac{4U_0}{7\omega L} = \frac{4\omega CU_0}{7}$; 3) в резисторе между ключом и A $Q_1 = \frac{32\,CU_0^2}{245}$, в каждом из четырёх остальных $Q_2 = \frac{2\,CU_0^2}{245}$; 4) не изменятся; 5) $U_{C\max} = \frac{\omega LU_0}{3R}$, $I_{L\max} = \frac{U_0}{3R}$, $Q_1 = \frac{2\,LU_0^2}{45R^2}$, $Q_2 = \frac{LU_0^2}{360R^2}$, при замыкании в момент максимального тока — те же.