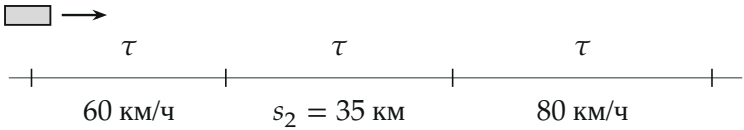
Автомобиль: средняя скорость

Задача 1. [Курчатов 2016/17, 7 класс, задача 1] Автомобиль, ехавший всё время в одном направлении, двигался первую треть времени с постоянной скоростью 60 км/ч, за вторую треть времени он проехал 35 км, а последний участок пути проехал с постоянной скоростью 80 км/ч. Скорость автомобиля на втором участке пути равнялась средней скорости за весь путь. Найдите

1. скорость автомобиля на втором участке;
2. полный путь, пройденный автомобилем;
3. время, затраченное на дорогу.



Поясняющий рисунок: три участка, на каждый ушла треть времени τ; на втором известен путь, на первом и третьем — скорости.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на среднюю скорость. Средняя скорость — весь путь, делённый на всё время, а не среднее арифметическое скоростей. Но здесь три участка пройдены за *одинаковое* время, и тогда средняя скорость по времени как раз равна среднему арифметическому. Скорость на втором участке равна общей средней — отсюда она и находится.

Обозначения. $v_1 = 60$ км/ч, $v_3 = 80$ км/ч, v_2 — скорость на втором участке, $s_2 = 35$ км; τ — треть полного времени (длительность каждого участка), $T = 3\tau$ — полное время, s — полный путь, $v_{\text{ср}}$ — средняя скорость.

Пункт 1. Скорость на втором участке.

1. Средняя скорость: определение. Пути на участках: $v_1\tau$, $v_2\tau$, $v_3\tau$. Средняя скорость на всём пути

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{T} = \frac{v_1\tau + v_2\tau + v_3\tau}{3\tau} = \frac{v_1 + v_2 + v_3}{3}.$$

Время τ сократилось — оно одинаковое у всех участков.

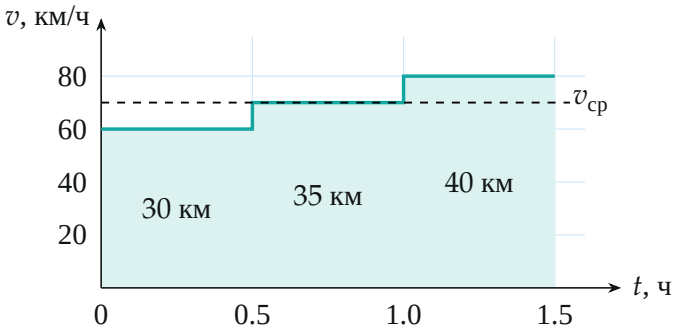
2. Условие $v_2 = v_{\text{ср}}$. Подставим:

$$v_2 = \frac{v_1 + v_2 + v_3}{3} \quad \Rightarrow \quad 3v_2 = v_1 + v_2 + v_3,$$

$$v_2 = \frac{v_1 + v_3}{2} = \frac{60 + 80}{2} = 70 \text{ км/ч}.$$

Смысл: если одна из трёх равных частей движется со средней скоростью, две другие вместе тоже должны дать ту же среднюю.

На графике скорости (рисунок 2) площадь под ступенькой — путь; горизонтальная линия $v_{\text{ср}}$ отсекает над ней на третьем участке ровно столько, сколько недостаёт на первом.



Скорость от времени: площади под ступенькой — пути на участках (30, 35, 40 км); пунктир — средняя скорость 70 км/ч.

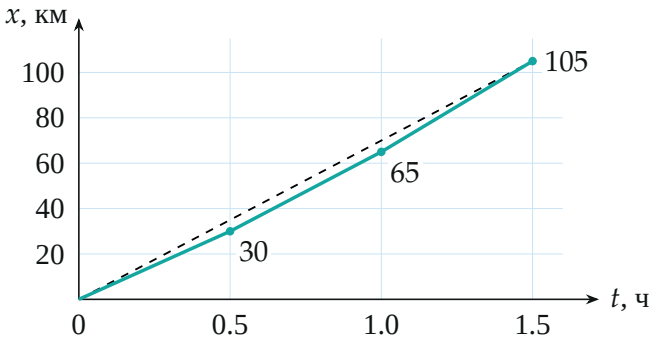
Пункт 3. Время в пути. Удобнее сначала время. Второй участок длиной s_2 пройден со скоростью v_2:

$$\tau = \frac{s_2}{v_2} = \frac{35 \text{ км}}{70 \text{ км/ч}} = 0{,}5 \text{ ч}, \qquad T = 3\tau = 1{,}5 \text{ ч}.$$

Пункт 2. Полный путь: определение средней скорости.

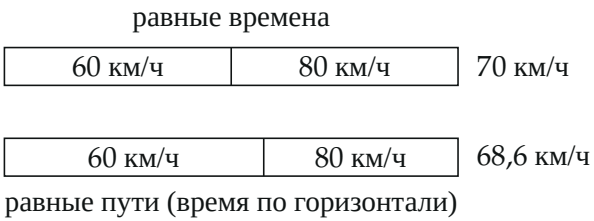
$$s = v_{\text{ср}} T = 70 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \cdot 1{,}5 \text{ ч} = 105 \text{ км}.$$

Тот же путь по участкам: $s_1 = v_1\tau = 30$ км, $s_2 = 35$ км, $s_3 = v_3\tau = 40$ км, сумма 105 км (рисунок 3).



Координата от времени (бирюзовая ломаная) и равномерное движение со средней скоростью (пунктир); второй участок идёт параллельно пунктиру — скорость на нём равна средней.

Обратите внимание. Среднее арифметическое скоростей $\frac{v_1+v_3}{2}$ здесь законно только потому, что участки длились одинаковое *время*. Если бы равными были пути, средняя скорость была бы $\frac{2v_1v_3}{v_1+v_3}$ — другое число (рисунок 4 сравнивает два случая).



Два участка по 60 и 80 км/ч: при равных временах средняя 70 км/ч, при равных путях медленный участок длится дольше, и средняя 68,6 км/ч.

Ответ:

$$v_2 = \frac{v_1 + v_3}{2} = 70 \text{ км/ч}, \qquad s = 3s_2 = 105 \text{ км},$$

$$T = \frac{3s_2}{v_2} = 1{,}5 \text{ ч}.$$

Проверка. Размерность: км/(км/ч) — часы. Прямой счёт (python): $s = 30 + 35 + 40 = 105$ км, $T = 1{,}5$ ч, $s/T = 70$ км/ч $= v_2$ — условие выполнено. Заметим: раз $v_2 = v_{\text{ср}}$ и все участки равны по времени, путь второго участка — ровно треть всего пути.

Ответ. 1) 70 км/ч; 2) 105 км; 3) 1,5 ч.