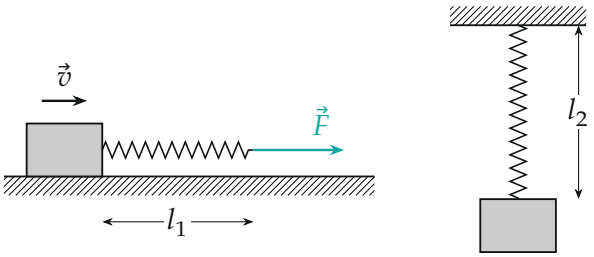
Брусок на пружине

Задача 4. [Курчатов 2016/17, 7 класс, задача 4] Левый конец горизонтально расположенной пружины прикреплён к бруску, а за правый конец тянут с постоянной силой F, направленной вправо. При этом длина пружины равна 100 мм, и брусок движется с постоянной скоростью по горизонтальной поверхности стола. Коэффициент трения равен 0,4, масса бруска 200 г. Если тот же самый брусок подвесить на той же самой пружине, расположенной вертикально, длина пружины составит 115 мм. Найдите

1. величину силы F;
2. жёсткость пружины k;
3. длину l пружины в недеформированном состоянии.

Ускорение свободного падения примите равным 10 Н/кг.



Поясняющий рисунок: брусок тянут по столу через пружину длиной $l_1 = 100$ мм; тот же брусок висит на пружине длиной $l_2 = 115$ мм.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на закон Гука и равновесие сил. В обоих опытах брусок движется равномерно или покоится, значит, силы на него уравновешены. На столе пружина уравновешивает силу трения скольжения, на подвесе — силу тяжести. Сила тяжести больше силы трения ($\mu = 0{,}4 < 1$), поэтому на подвесе пружина растянута сильнее. Разница длин 15 мм и даёт жёсткость.

Обозначения. $m = 200$ г $= 0{,}2$ кг, $\mu = 0{,}4$, $g = 10$ Н/кг, $l_1 = 100$ мм, $l_2 = 115$ мм; x_1, x_2 — удлинения пружины в двух опытах, l — длина недеформированной пружины, k — жёсткость; ось x — вправо, ось y — вверх. Пружину считаем лёгкой.

Пункт 1. Сила F.

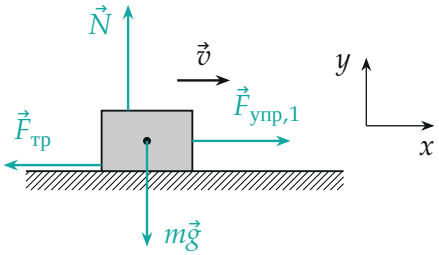
1. Лёгкая пружина: второй закон Ньютона для пружины. Масса пружины ничтожна, поэтому силы на её концах равны: рука тянет правый конец с силой F — пружина тянет брусок с той же силой $F_{\text{упр},1} = F$.

2. Брусок на столе: первый закон Ньютона в проекциях на оси x и y. Брусок движется с постоянной скоростью (рисунок 2):

$$x:\ F_{\text{упр},1} - F_{\text{тр}} = 0, \qquad y:\ N - mg = 0.$$

Брусок скользит, поэтому трение — трения скольжения: $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg$. Тогда

$$F = F_{\text{упр},1} = \mu mg = 0{,}4 \cdot 0{,}2 \text{ кг} \cdot 10 \frac{\text{Н}}{\text{кг}} = 0{,}8 \text{ Н}.$$

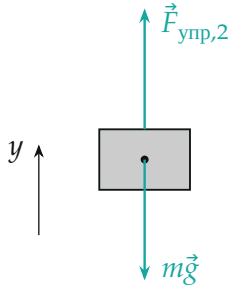


Силы, действующие на брусок на столе: упругость пружины, трение скольжения, тяжесть, реакция опоры; скорость постоянна — силы уравновешены.

Пункт 2. Жёсткость k.

3. Брусок на подвесе: первый закон Ньютона в проекции на ось y. Брусок покоится (рисунок 3):

$$F_{\text{упр},2} - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{\text{упр},2} = mg = 2 \text{ Н}.$$



Силы, действующие на висящий брусок: упругость пружины вверх и тяжесть вниз.

4. Закон Гука для двух опытов. Пружина одна и та же, жёсткость одна:

$$kx_1 = \mu mg, \qquad kx_2 = mg \quad \Rightarrow \quad x_1 = \mu x_2.$$

Длины: $l_1 = l + x_1$, $l_2 = l + x_2$, разность (рисунок 4)

$$x_2 - x_1 = l_2 - l_1 = 15 \text{ мм}.$$

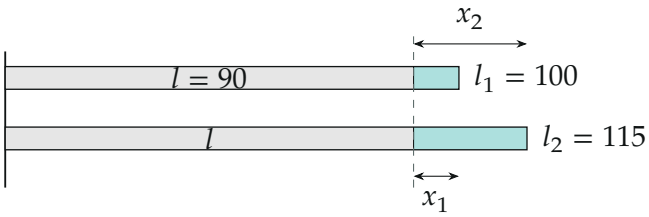
Подставим $x_1 = \mu x_2$:

$$(1-\mu)x_2 = l_2 - l_1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{l_2 - l_1}{1-\mu} = \frac{15 \text{ мм}}{0{,}6} = 25 \text{ мм},$$

$$x_1 = \mu x_2 = 0{,}4 \cdot 25 = 10 \text{ мм}.$$

Жёсткость:

$$k = \frac{mg}{x_2} = \frac{(1-\mu)mg}{l_2 - l_1} = \frac{2 \text{ Н}}{0{,}025 \text{ м}} = 80 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$



Длины пружины в миллиметрах: обе полоски начинаются с недеформированной длины l, удлинения $x_1 = 10$ и $x_2 = 25$ мм (бирюза) отличаются на 15 мм.

Пункт 3. Длина недеформированной пружины.

$$l = l_1 - x_1 = 100 - 10 = 90 \text{ мм} \quad (\text{и } l_2 - x_2 = 115 - 25 = 90 \text{ мм}).$$

Обратите внимание. F равно не mg, а μmg: брусок скользит, тянут его горизонтально, и пружина уравновешивает трение, а не вес. Длина $l_1 = 100$ мм — уже растянутая пружина, её нельзя брать за l.

Ответ:

$$F = \mu mg = 0{,}8 \text{ Н}, \qquad k = \frac{(1-\mu)mg}{l_2 - l_1} = 80 \frac{\text{Н}}{\text{м}},$$

$$l = \frac{l_1 - \mu l_2}{1 - \mu} = 90 \text{ мм}.$$

Проверка. Размерность k: Н/м. Формула для l:

$$l = l_1 - x_1 = l_1 - \mu\,\frac{l_2 - l_1}{1-\mu} = \frac{l_1 - \mu l_2}{1-\mu} = \frac{100 - 46}{0{,}6} = 90 \text{ мм}.$$

Предел $\mu \to 0$ (нет трения): $F \to 0$, $x_1 \to 0$, $l \to l_1$ — пружина на столе не растянута, верно. Обратный счёт (python): $80 \cdot 0{,}010 = 0{,}8$ Н, $80 \cdot 0{,}025 = 2$ Н.

Ответ. 1) $F = 0{,}8$ Н; 2) $k = 80$ Н/м; 3) $l = 90$ мм.