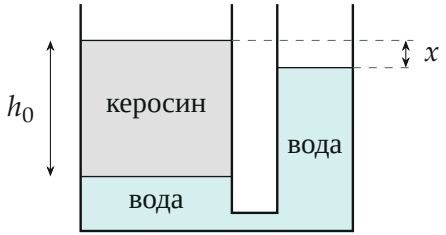
Керосин в сообщающихся сосудах

Задача 5. [Курчатов 2016/17, 7 класс, задача 5] В двух цилиндрических сообщающихся сосудах находится вода. Площадь поперечного сечения широкого сосуда в два раза больше площади поперечного сечения узкого сосуда. После того, как в широкий сосуд долили керосин, уровень жидкости в широком сосуде стал на $x = 3$ см выше, чем в узком, а высота столба керосина составила $h_0 = 15$ см (керосин и вода не смешиваются, керосин находится только в широком сосуде). На сколько изменился уровень жидкости в узком сосуде? Какова плотность керосина? Плотность воды 1000 кг/м^3.



Поясняющий рисунок: после доливания керосин занимает в широком сосуде столб h_0, его верх на x выше уровня воды в узком.

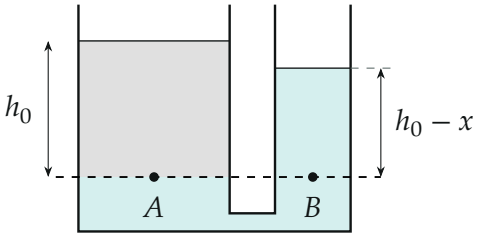
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на сообщающиеся сосуды. Покоящаяся жидкость одна (вода) на одном уровне имеет одно давление — отсюда связь высот столбов и плотность керосина. Второе условие — воды не прибавилось: сколько её ушло из широкого сосуда, столько пришло в узкий. Узкий вдвое уже, поэтому там уровень меняется вдвое сильнее.

Обозначения. $\rho = 1000$ кг/м^3 — плотность воды, $\rho_к$ — керосина; S и $2S$ — сечения узкого и широкого сосудов; $h_0 = 15$ см, $x = 3$ см; h — насколько опустилась граница вода–керосин в широком сосуде (относительно начального уровня воды); p_0 — атмосферное давление.

1. Плотность керосина: равенство давлений на одном уровне. Зачем этот уровень: проведём горизонталь AB через границу воды и керосина (рисунок 2). Ниже неё в обоих сосудах только вода, она покоится

и связана через дно — значит, в точках A и B давления равны. Над A — столб керосина h_0, над B — столб воды высотой $h_0 - x$ (верх керосина на x выше воды в узком):

$$p_0 + \rho_к g h_0 = p_0 + \rho g (h_0 - x).$$



Уровень AB проходит по границе вода–керосин; под ним в обоих сосудах вода, давления в A и B равны.

Атмосферное давление сокращается:

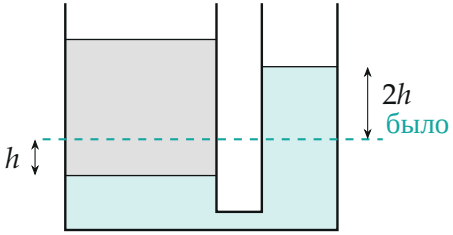
$$\rho_к = \rho \frac{h_0 - x}{h_0} = 1000 \frac{кг}{м^3} \cdot \frac{12}{15} = 800 \frac{кг}{м^3}.$$

2. Сохранение объёма воды. Граница в широком сосуде опустилась на h — из него ушёл объём воды $2S \cdot h$. Он весь пришёл в узкий сосуд, где уровень поднялся на Δ:

$$2Sh = S\Delta \quad \Rightarrow \quad \Delta = 2h.$$

3. Связь с высотой столба воды над уровнем AB. Уровень AB на h ниже начального уровня воды, вода в узком — на $2h$ выше него (рисунок 3). Высота столба воды над AB из шага 1:

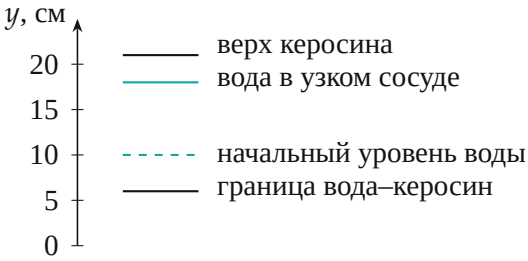
$$h + 2h = h_0 - x \quad \Rightarrow \quad h = \frac{h_0 - x}{3} = \frac{12\text{ см}}{3} = 4\text{ см}, \qquad \Delta = 2h = 8\text{ см}.$$



Начальный уровень воды (бирюзовый пунктир): в широком сосуде вода опустилась на h, в узком поднялась на $2h$; вместе $3h = h_0 - x$.

Обратите внимание. Спрашивают «на сколько изменился уровень в узком сосуде» — нужно $2h$, а не h: узкий сосуд вдвое уже, поэтому тот же объём воды поднимает уровень в нём вдвое выше, чем опускает в широком.

Числа задачи на одной шкале — на рисунке 4: начальный уровень воды 10 см (любой; ответ от него не зависит), граница 6 см, вода в узком 18 см, верх керосина 21 см.



Уровни после доливания на одной шкале: $18 - 10 = 8$ см — подъём в узком сосуде, $21 - 18 = 3$ см $= x$, $21 - 6 = 15$ см $= h_0$.

Ответ:

$$\Delta = \frac{2}{3}(h_0 - x) = 8 \text{ см (поднялся)}, \qquad \rho_к = \rho\frac{h_0 - x}{h_0} = 800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Проверка. Размерности: см и кг/м^3. Предел: керосин той же плотности, что вода ($x = 0$) — столб высотой h_0 поднимает воду в узком на $\frac{2}{3}h_0$, а верх жидкости в обоих сосудах на одном уровне, как и должно быть в сообщающихся сосудах с одной жидкостью. Второй способ (python,

давление на дне): широкий — $800 \cdot 0{,}15 + 1000 \cdot 0{,}06 = 180$, узкий — $1000 \cdot 0{,}18 = 180$ (в кг/м^2, множитель g общий) — давления равны.

Ответ. Уровень в узком сосуде поднялся на 8 см; плотность керосина 800 кг/м^3.