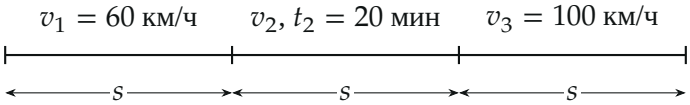
Автомобиль: средняя скорость по пути

Задача 1. [Курчатов 2016/17, 8 класс, задача 1] Автомобиль ехал всё время в одном направлении. Первую треть пути автомобиль прошёл с постоянной скоростью 60 км/ч, вторую треть пути он проехал за 20 минут, а последний участок пути проехал с постоянной скоростью 100 км/ч. Скорость автомобиля на втором участке пути равнялась средней скорости за всё время движения. Найдите

1. скорость автомобиля на втором участке;
2. полный путь, пройденный автомобилем;
3. время, затраченное на дорогу.



Поясняющий рисунок: три равные части пути s и известные данные на каждой.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на среднюю скорость. Главное наблюдение: если на втором участке скорость равна средней по всему пути, то этот участок «не меняет» среднюю, и средняя скорость на первом и третьем участках вместе тоже равна ей. А среднюю на двух равных по длине участках можно найти, не зная их длины.

Обозначения. s — треть пути; $v_1 = 60$ км/ч, v_2, $v_3 = 100$ км/ч — скорости на участках; t_1, $t_2 = 20$ мин $= \frac{1}{3}$ ч, t_3 — времена; $v_{\text{ср}}$ — средняя скорость за всё движение.

Пункт 1. Скорость на втором участке.

1. Средняя скорость по определению: весь путь на всё время.

$$v_{\text{ср}} = \frac{3s}{t_1 + t_2 + t_3}.$$

По условию $v_2 = v_{\text{ср}}$, а на втором участке $s = v_2 t_2$. Подставим:

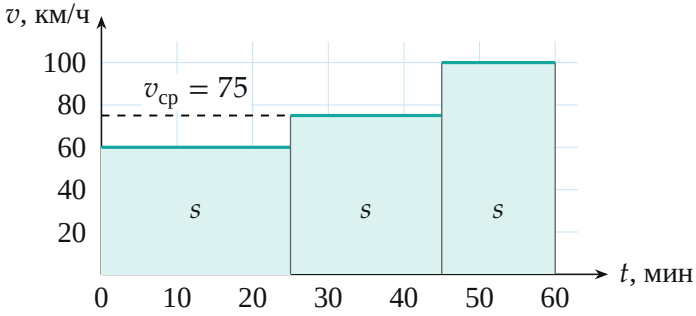
$$v_2 (t_1 + t_2 + t_3) = 3s = 2s + v_2 t_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 (t_1 + t_3) = 2s.$$

Значит, $v_2 = \dfrac{2s}{t_1 + t_3}$ — это средняя скорость на первом и третьем участках вместе.

2. Средняя скорость на двух участках равной длины. Времена: $t_1 = s/v_1$, $t_3 = s/v_3$, и s сокращается:

$$v_2 = \frac{2s}{\dfrac{s}{v_1} + \dfrac{s}{v_3}} = \frac{2v_1v_3}{v_1 + v_3} = \frac{2 \cdot 60 \cdot 100}{160} \text{ км/ч} = 75 \text{ км/ч}.$$

Скорость получилась между 60 и 100, ближе к меньшей: на медленном участке машина едет дольше (рисунок 2).



Скорость от времени: площади трёх прямоугольников (пути) равны по $s = 25$ км; пунктир — средняя скорость 75 км/ч, она совпадает со скоростью на втором участке.

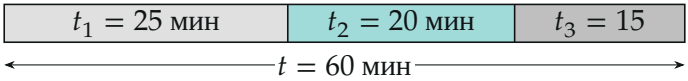
Пункт 2. Полный путь. На втором участке движение равномерное:

$$s = v_2t_2 = 75 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \cdot \frac{1}{3} \text{ ч} = 25 \text{ км}, \qquad 3s = 75 \text{ км}.$$

Пункт 3. Время в пути. По определению средней скорости

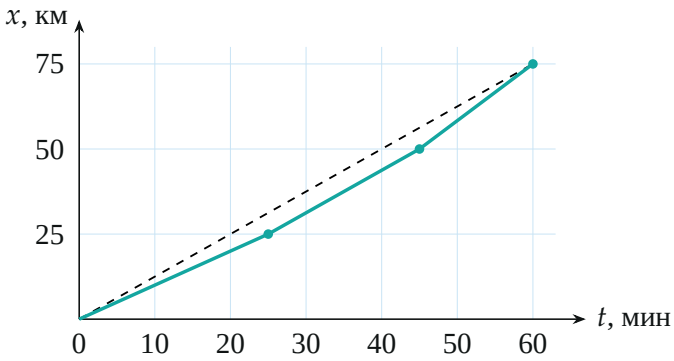
$$t = \frac{3s}{v_{\text{ср}}} = \frac{75 \text{ км}}{75 \text{ км/ч}} = 1 \text{ ч}.$$

Проверим по участкам: $t_1 = 25/60$ ч $= 25$ мин, $t_2 = 20$ мин, $t_3 = 25/100$ ч $= 15$ мин; сумма 60 мин (рисунок 3).



Время на каждом участке; в сумме один час.

Координата автомобиля от времени — ломаная из трёх отрезков с наклонами 60, 75 и 100 км/ч (рисунок 4); прямая из начала в конец (пунктир) имеет наклон 75 км/ч и параллельна среднему отрезку.



Координата от времени: средний участок параллелен пунктиру «весь путь за всё время».

Обратите внимание. Средняя скорость на первом и третьем участках — не $(60 + 100)/2 = 80$ км/ч: участки равны по пути, а не по времени, поэтому среднее — гармоническое, 75 км/ч.

Ответ:

$$v_2 = \frac{2v_1v_3}{v_1 + v_3} = 75 \text{ км/ч}, \qquad 3s = 3v_2t_2 = 75 \text{ км}, \qquad t = 1 \text{ ч}.$$

Проверка. Размерность: $v_1v_3/(v_1+v_3)$ — км/ч. Предел $v_1 = v_3$: $v_2 = v_1$ — всё движение равномерное, верно. Средняя по времени (python): $75/(25/60 + 1/3 + 1/4) = 75$ км/ч $= v_2$ — условие задачи выполнено.

Ответ. 1) 75 км/ч; 2) 75 км; 3) 1 ч.