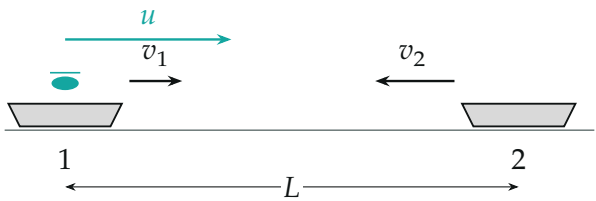
Вертолёт между авианосцами с зависанием

Задача 1. [Курчатов 2016/17, 9 класс, задача 1] Два авианосца движутся навстречу друг другу с постоянными скоростями. Скорость первого авианосца 20 км/ч, скорость второго — 30 км/ч. В момент, когда расстояние между кораблями равно 60 км, с первого авианосца взлетает вертолёт и движется по прямой ко второму авианосцу со скоростью 150 км/ч. Долетев до второго авианосца, вертолёт зависает на 18 минут над этим кораблём, и затем возвращается на первый авианосец, вновь двигаясь со скоростью 150 км/ч. Сколько времени вертолёт отсутствовал на первом авианосце? Найдите путь, пройденный вертолётом.



Поясняющий рисунок: авианосцы 1 *и* 2 *идут навстречу, вертолёт взлетает с первого к второму.*

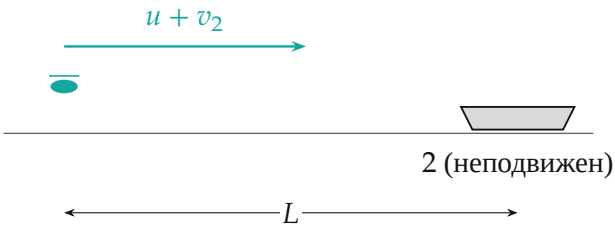
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на относительное движение. Полёт делится на три этапа: вертолёт догоняет-встречает второй авианосец, висит над ним (то есть движется вместе с ним), летит обратно навстречу первому. На первом и третьем этапах удобно перейти в систему отсчёта того авианосца, к которому летим: там расстояние сокращается со скоростью сближения. Ловушка — второй этап: пока вертолёт висит, авианосцы продолжают сближаться.

Обозначения. $v_1 = 20$ км/ч, $v_2 = 30$ км/ч — скорости авианосцев, $u = 150$ км/ч — скорость вертолёта, $L = 60$ км — начальное расстояние; t_1, $t_2 = 18$ мин, t_3 — длительности этапов; ось x — от первого авианосца ко второму.

1. Полёт ко второму авианосцу: закон сложения скоростей. В системе отсчёта второго авианосца вертолёт приближается со скоростью

$u + v_2$ (скорости направлены навстречу, рисунок 2) и проходит расстояние L:

$$t_1 = \frac{L}{u + v_2} = \frac{60\text{ км}}{180\text{ км/ч}} = \frac{1}{3}\text{ ч} = 20\text{ мин}.$$



Этап 1 в системе отсчёта второго авианосца: вертолёт летит к нему со скоростью $u + v_2$ и проходит L.

2. Зависание: равномерное движение вместе со вторым авианосцем. «Зависает над кораблём» — значит, относительно корабля покоится и вместе с ним движется со скоростью v_2. Авианосцы всё это время сближаются со скоростью $v_1 + v_2 = 50$ км/ч. За время $t_1 + t_2 = 38$ мин от взлёта расстояние между ними сократилось на

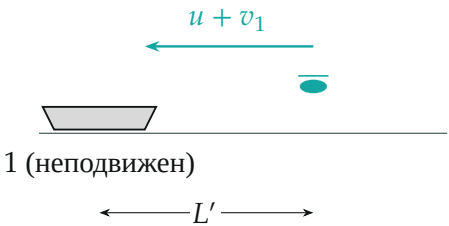
$$(v_1 + v_2)(t_1 + t_2) = 50\text{ км/ч} \cdot \frac{38}{60}\text{ ч} = \frac{95}{3}\text{ км},$$

и к началу обратного полёта осталось

$$L' = L - (v_1 + v_2)(t_1 + t_2) = 60 - \frac{95}{3} = \frac{85}{3}\text{ км} \approx 28{,}3\text{ км}.$$

3. Обратный полёт: закон сложения скоростей. В системе отсчёта первого авианосца вертолёт приближается со скоростью $u + v_1 = 170$ км/ч (рисунок 3):

$$t_3 = \frac{L'}{u + v_1} = \frac{85/3\text{ км}}{170\text{ км/ч}} = \frac{1}{6}\text{ ч} = 10\text{ мин}.$$



Этап 3 в системе отсчёта первого авианосца: расстояние L' сокращается со скоростью $u + v_1$.

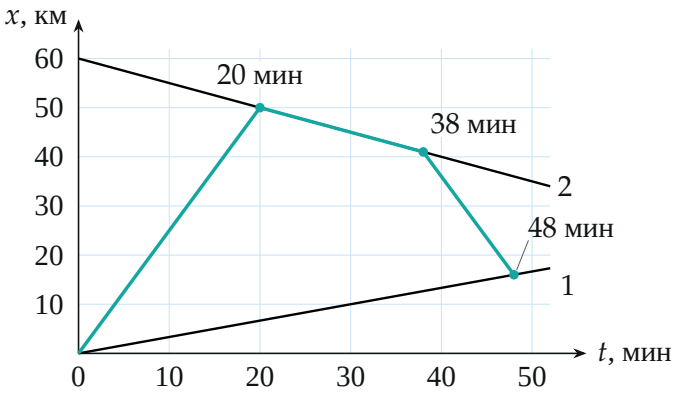
4. Время отсутствия.

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = 20 + 18 + 10 = 48 \text{ мин}.$$

5. Путь вертолёта (относительно воды). Путь считаем в системе отсчёта воды (земли). На этапах 1 и 3 вертолёт летит со скоростью u в течение $t_1 + t_3 = 30$ мин; на этапе 2 он движется вместе со вторым авианосцем со скоростью v_2 в течение t_2:

$$s = u\,(t_1 + t_3) + v_2 t_2 = 150 \cdot \frac{1}{2} + 30 \cdot \frac{3}{10} = 75 + 9 = 84 \text{ км}.$$

Весь полёт на графике координат (рисунок 4): координаты вертолёта в моменты 20, 38, 48 мин — 50, 41 и 16 км; в момент посадки первый авианосец тоже в точке $x = 20 \cdot 0{,}8 = 16$ км.



Координаты авианосцев (чёрные прямые 1 и 2) и вертолёта (бирюзовая ломаная) от времени; на участке 20–38 мин ломаная идёт по прямой 2 — зависание над вторым авианосцем.

Обратите внимание. Во время зависания вертолёт не стоит на месте относительно воды: он проходит $v_2 t_2 = 9$ км вместе с кораблём. Если забыть это, получится путь 75 км вместо 84 км.

Ответ:

$$t = \frac{L}{u+v_2} + t_2 + \frac{L-(v_1+v_2)(t_1+t_2)}{u+v_1} = 48 \text{ мин}, \qquad s = u(t_1+t_3)+v_2 t_2 = 8$$

Проверка. Размерность: км/(км/ч) — часы. Второй способ (python, координаты): первый авианосец в момент 48 мин находится в $x = 16$ км, вертолёт после этапа 3 — в $41 - 150 \cdot \frac{1}{6} = 16$ км — встреча совпала. Предел $t_2 = 0$: обратный путь $(60 - 50/3)/170$ ч $\approx 15{,}3$ мин, всего 35,3 мин; с зависанием на 18 мин общее время выросло лишь на 12,7 мин, потому что за время зависания авианосцы сблизились на 15 км и обратный полёт сократился на 5,3 мин.

Ответ. Вертолёт отсутствовал 48 мин; его путь 84 км.