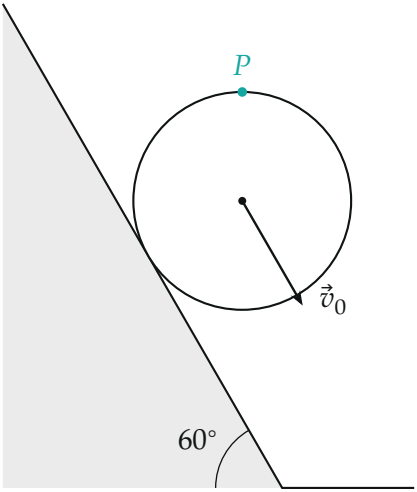
Скорость верхней точки диска

Задача 2. [Курчатов 2016/17, 9 класс, задача 2] Диск катится без проскальзывания с постоянной скоростью v_0 вниз по наклонной плоскости, составляющей угол 60° с горизонтом. Найдите модуль скорости верхней точки диска.



Поясняющий рисунок: диск на наклонной плоскости, $\vec{v}_0$ — скорость центра, P — верхняя точка.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на кинематику качения. Движение диска — сумма поступательного движения вместе с центром и вращения вокруг центра. Условие «без проскальзывания» связывает две части: точка касания с плоскостью покоится, отсюда скорость вращения края равна скорости центра. Остаётся сложить два вектора для верхней точки — они направлены под углом, поэтому складываем по проекциям.

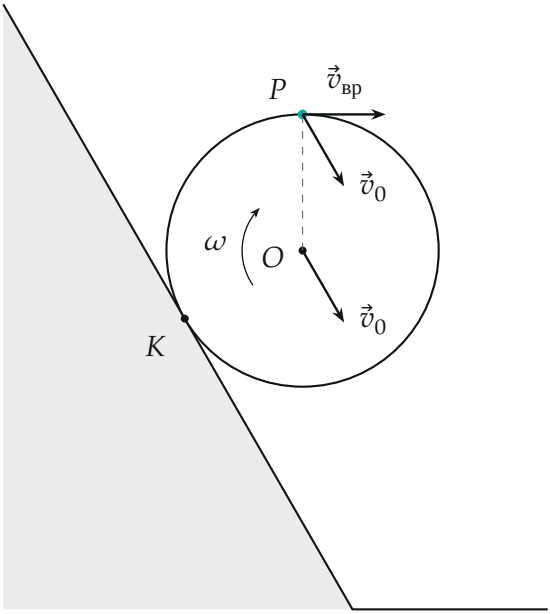
Обозначения. O — центр диска, R — радиус, ω — угловая скорость; K — точка касания, P — верхняя (самая высокая) точка; $\vec{v}_{\text{вр}}$ — скорость точки во вращении вокруг O; ось x — горизонтально в сторону качения, y — вверх.

1. Скорость вращения края: условие отсутствия проскальзывания. Точка K неподвижна: $\vec{v}_K = \vec{v}_0 + \vec{v}_{\text{вр},K} = 0$, значит, $v_{\text{вр},K} = \omega R = v_0$.

Все точки края вращаются вокруг центра с одной и той же по модулю скоростью

$$v_{\text{вр}} = \omega R = v_0.$$

2. Направления двух скоростей верхней точки. Скорость вращения перпендикулярна радиусу OP; радиус OP вертикален, поэтому $\vec{v}_{\text{вр},P}$ горизонтальна и направлена вперёд, по ходу качения (диск вращается по часовой стрелке, рисунок 2). Скорость центра $\vec{v}_0$ направлена вдоль плоскости вниз, под углом 60° к горизонту.



Скорость точки P — сумма скорости центра $\vec{v}_0$ (вдоль плоскости) и скорости вращения $\vec{v}_{вр}$ (горизонтально, перпендикулярно OP); обе по модулю v_0.

3. Сложение скоростей в проекциях. $\vec{v}_P = \vec{v}_0 + \vec{v}_{\text{вр},P}$. Проекции на оси:

$$v_{Px} = v_0 \cos 60° + v_0, \qquad v_{Py} = -v_0 \sin 60°.$$

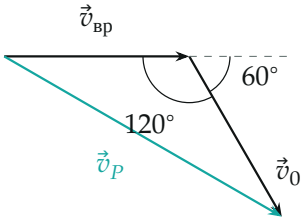
Подставляем значения:

$$v_{Px} = \frac{v_0}{2} + v_0 = \frac{3}{2}v_0, \qquad v_{Py} = -\frac{\sqrt{3}}{2}v_0.$$

4. Модуль скорости: теорема Пифагора.

$$v_P = \sqrt{v_{Px}^2 + v_{Py}^2} = \sqrt{\frac{9}{4}v_0^2 + \frac{3}{4}v_0^2} = \sqrt{3}\,v_0.$$

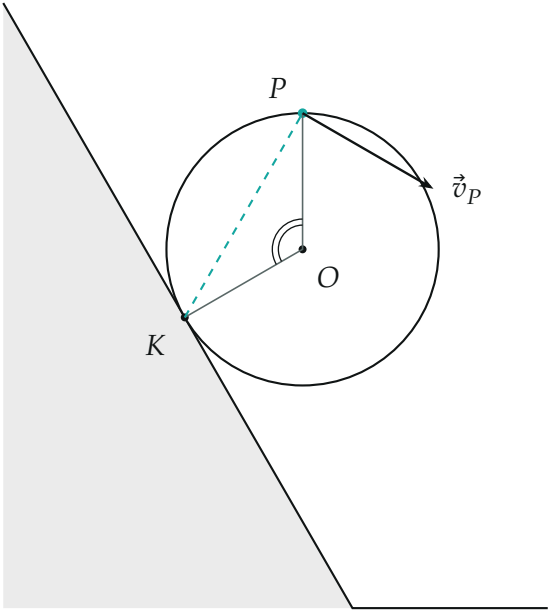
Тот же результат даёт треугольник скоростей (рисунок 3): два вектора длины v_0 с углом $60°$ между ними; их сумма — диагональ ромба, $2v_0 \cos 30° = \sqrt{3}\,v_0$.



Треугольник скоростей: стороны v_0 и v_0, угол между ними в треугольнике $120°$; третья сторона $v_P = \sqrt{v_0^2 + v_0^2 - 2v_0^2 \cos 120°} = \sqrt{3}\,v_0$.

5. Второй способ: мгновенный центр вращения. Точка касания K покоится, поэтому в данный момент весь диск поворачивается вокруг K с угловой скоростью $\omega = v_0/R$, и $v_P = \omega \cdot KP$. Радиус OK перпендикулярен плоскости, то есть наклонён к вертикали на $60°$; угол KOP между OK и вертикальным OP равен $180° - 60° = 120°$ (рисунок 4). По теореме косинусов

$$KP = \sqrt{R^2 + R^2 - 2R^2 \cos 120°} = \sqrt{3}\,R, \qquad v_P = \frac{v_0}{R} \cdot \sqrt{3}\,R = \sqrt{3}\,v_0.$$



Мгновенный центр вращения — точка касания K; двойной дугой отмечен угол $KOP = 120°$; скорость $\vec{v}_P$ перпендикулярна KP, её модуль $\omega \cdot KP$.

Обратите внимание. «Верхняя точка» — самая высокая точка диска, а не точка, противоположная точке касания. У противоположной точки скорость вращения сонаправлена со скоростью центра, и её скорость $2v_0$; у самой высокой точки векторы направлены под углом $60°$, поэтому получается меньше.

Ответ:

$$v_P = \sqrt{\left(v_0 + v_0 \cos 60°\right)^2 + \left(v_0 \sin 60°\right)^2} = \sqrt{3}\, v_0 \approx 1{,}73\, v_0.$$

Проверка. Размерность — скорость. Предел горизонтальной плоскости ($0°$ вместо $60°$): формула шага 3 даёт $2v_0$ — известный результат для верхней точки колеса. Направление: $\vec{v}_P$ перпендикулярна KP (python: скалярное произведение $(3/2,\ -\sqrt{3}/2) \cdot (\sqrt{3}/2,\ 3/2) = 0$) — оба способа согласованы.

Ответ. $v = \sqrt{3}\, v_0 \approx 1{,}73\, v_0$.