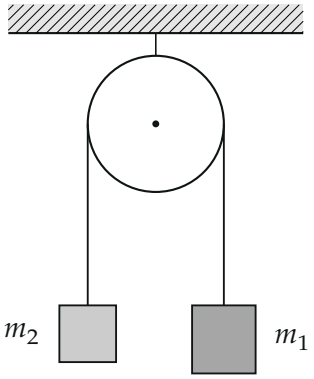
Грузы на блоке: скорости

Задача 3. [Курчатов 2016/17, 9 класс, задача 3] Невесомая нерастяжимая нить перекинута через идеальный неподвижный блок. К концам нити подвешены небольшие грузы: к правому — груз массой m_1, к левому — груз массой m_2, $m_1 > m_2$. Изначально грузы удерживают неподвижно на одном уровне, затем их отпускают. Найдите скорости (модуль и направление) грузов в момент, когда расстояние между ними по вертикали составит h. Ускорение свободного падения g, трение пренебрежимо мало.



Поясняющий рисунок: грузы на одном уровне перед тем, как их отпускают.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на систему тел, связанных нитью через блок. Правый груз тяжелее и пойдёт вниз, левый — вверх. Нить нерастяжима — скорости грузов в каждый момент одинаковы по модулю, а смещения равны. Трения нет, нить и блок идеальны — механическая энергия системы двух грузов сохраняется. Ключевой шаг — понять, на сколько сместился каждый груз, когда расстояние между ними стало h.

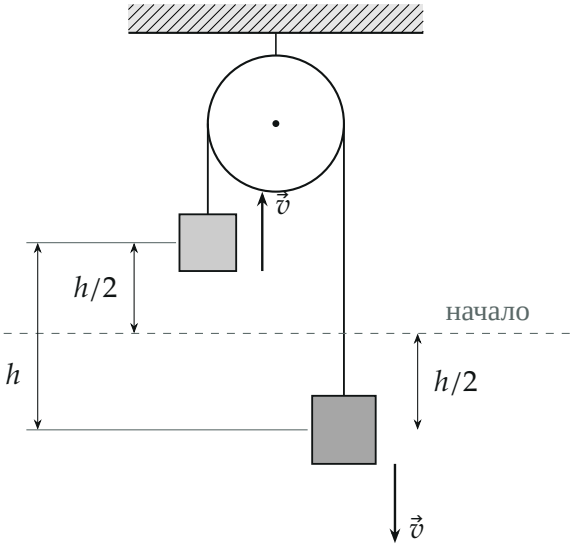
Обозначения. v — модуль скорости грузов, x — смещение каждого груза от начального уровня; ось y — вертикально вверх, нулевой уровень потенциальной энергии — начальный уровень грузов.

1. Связь движений грузов: нерастяжимость нити. Длина нити постоянна: насколько правый конец опустился, настолько левый поднялся.

Поэтому в любой момент смещения равны x, а скорости равны по модулю и противоположны по направлению. Правый груз тяжелее ($m_1 > m_2$) — он движется вниз, левый — вверх.

2. Смещение грузов. Сначала грузы на одном уровне; правый опустился на x, левый поднялся на x, расстояние между ними по вертикали $2x$ (рисунок 2). Оно равно h:

$$2x = h \quad \Rightarrow \quad x = \frac{h}{2}.$$



Расстояние между грузами h складывается из двух равных смещений $h/2$: правый опустился, левый поднялся; скорости равны по модулю.

3. Закон сохранения механической энергии системы «два груза». Нить и блок идеальны, трения нет — работа сил натяжения над системой в сумме равна нулю (нить нерастяжима), механическая энергия сохраняется. Сначала грузы покоятся на нулевом уровне, энергия равна нулю. В искомый момент:

$$0 = \frac{m_1 v^2}{2} + \frac{m_2 v^2}{2} + m_2 g \frac{h}{2} - m_1 g \frac{h}{2}.$$

Отсюда

$$\frac{(m_1+m_2)v^2}{2} = (m_1-m_2)\,g\,\frac{h}{2}, \qquad v=\sqrt{\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\,gh}.$$

4. Второй способ: второй закон Ньютона для каждого груза. Силы — на рисунке 3: на каждый груз действуют сила тяжести вниз и сила натяжения T вверх (нить невесома, блок идеален — натяжение по обе стороны одно). Ускорения равны по модулю a; правый движется вниз, левый вверх. Проекции на вертикаль (для каждого груза — на направление его ускорения):

$$m_1a = m_1g - T, \qquad m_2a = T - m_2g.$$

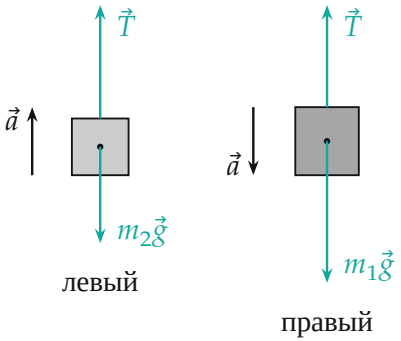
Складываем, T сокращается:

$$a = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\,g.$$

Движение равноускоренное из покоя, путь каждого груза $h/2$:

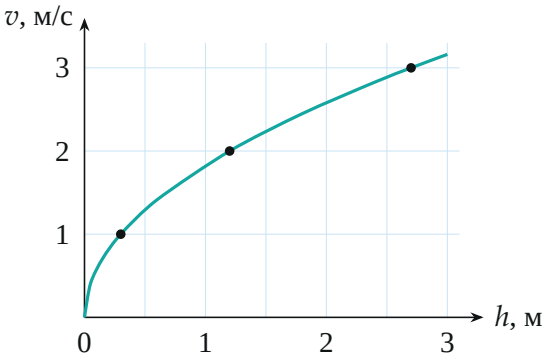
$$v^2 = 2a\cdot\frac{h}{2} = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\,gh$$

— то же, что и по энергии.



Силы, действующие на грузы: натяжение T одинаково; у правого груза сила тяжести больше T, у левого — меньше.

5. Как скорость зависит от h. $v \propto \sqrt{h}$ — парабола, лежащая на боку. Например, при $m_1 = 2m_2$: $v = \sqrt{gh/3}$; при $g = 10$ м/с^2 и $h = 0{,}3$; 1,2; 2,7 м скорость 1; 2; 3 м/с (рисунок 4, посчитано по формуле).



Скорость грузов от расстояния между ними при $m_1 = 2m_2$: $v = \sqrt{gh/3}$.

Обратите внимание. Каждый груз сместился на $h/2$, а не на h: расстояние между грузами растёт вдвое быстрее, чем смещается каждый. Подставив h вместо $h/2$, получим скорость в $\sqrt{2}$ раз больше верной.

Ответ:

$$v = \sqrt{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,gh};$$

скорость правого груза (m_1) направлена вертикально вниз, левого (m_2) — вертикально вверх, модули равны.

Проверка. Размерность: $\sqrt{gh}$ — м/с. Предел $m_1 = m_2$: $v = 0$ — грузы уравновешены, верно. Предел $m_2 \to 0$: $v = \sqrt{gh}$ — свободное падение правого груза с высоты $h/2$: $\sqrt{2g \cdot h/2}$, верно.

Ответ. $v = \sqrt{\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,gh}$; правый груз ($m_1$) движется вниз, левый ($m_2$) — вверх с той же по модулю скоростью.