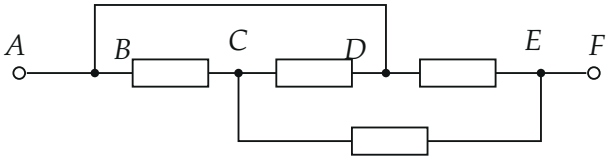
Сопротивление цепи A–F

Задача 5. [Курчатов 2016/17, 9 класс, задача 5] Найдите сопротивление между точками A и F участка цепи, схема которого показана на рисунке. Все резисторы имеют одинаковое сопротивление $R = 120$ кОм, сопротивлением соединительных проводов можно пренебречь.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на смешанное соединение резисторов. Провод без сопротивления BD делает точки B и D одним узлом: напряжение на нём ноль. После объединения узлов схема распадается на последовательные и параллельные участки, и сопротивление складывается по двум правилам.

Обозначения. R_1 — резистор BC, R_2 — CD, R_3 — DE, R_4 — нижний резистор CE; все равны R.

1. Объединение узлов: закон Ома для провода. Сопротивление провода BD равно нулю, значит, напряжение на нём $U_{BD} = IR_{\text{пр}} = 0$ при любом токе: $\varphi_B = \varphi_D$. Точки с равными потенциалами можно стянуть в одну, токи от этого не изменятся. Точка A соединена с B проводом — это тот же узел. Получаем три узла: A ($= B = D$), C, E ($= F$) (рисунок 2).

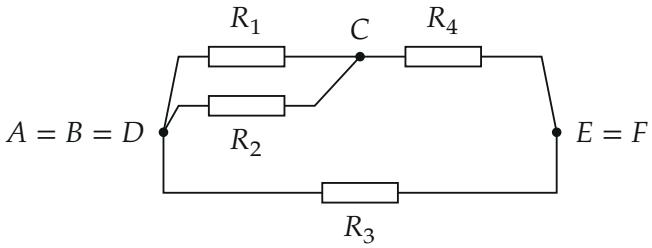


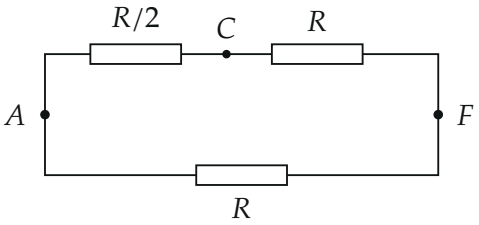
Схема после объединения B и D: между A и C — два резистора R_1 и R_2, от C к E — R_4, от A прямо к E — R_3.

2. Параллельное соединение R_1 и R_2. Оба резистора включены между одними и теми же узлами A и C — напряжение на них одно, токи складываются:

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \quad \Rightarrow \quad R_{12} = \frac{R}{2}.$$

3. Последовательное соединение R_{12} и R_4. Через узел C других путей нет: весь ток, прошедший R_{12}, идёт через R_4 (рисунок 3):

$$R_{124} = \frac{R}{2} + R = \frac{3}{2}R.$$

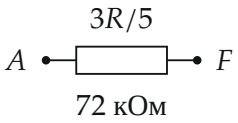


Две параллельные ветви между A и F: верхняя $R/2 + R = 3R/2$, нижняя R.

4. Параллельное соединение двух ветвей. Ветвь $\frac{3}{2}R$ и резистор $R_3 = R$ подключены к одним и тем же узлам A и F:

$$\frac{1}{R_{AF}} = \frac{1}{R} + \frac{2}{3R} = \frac{5}{3R}, \qquad R_{AF} = \frac{3}{5}R = \frac{3}{5} \cdot 120\ \text{кОм} = 72\ \text{кОм}.$$

Итоговая цепочка упрощений — на рисунке 4.



Эквивалентный резистор между A и F.

Обратите внимание. Провод BD не «закорачивает» резисторы целиком: R_1 и R_2 оказываются не замкнутыми накоротко, а параллельными — оба соединяют узел $A{=}B{=}D$ с узлом C, и ток через них идёт.

Ответ:

$$R_{AF} = \frac{R \cdot \frac{3}{2}R}{R + \frac{3}{2}R} = \frac{3}{5}R = 72 \text{ кОм}.$$

Проверка. Размерность — Ом. R_{AF} меньше каждой из ветвей (R и $1{,}5R$) — как и должно быть при параллельном соединении. Второй способ (python, метод узловых потенциалов: $\varphi_A = 1$, $\varphi_F = 0$, уравнение для узла C): $\varphi_C = 2/3$, ток из A равен $\frac{1}{R} + 2 \cdot \frac{1/3}{R} = \frac{5}{3R}$ — то же $R_{AF} = 3R/5$.

Ответ. $R_{AF} = \frac{3}{5}R = 72$ кОм.