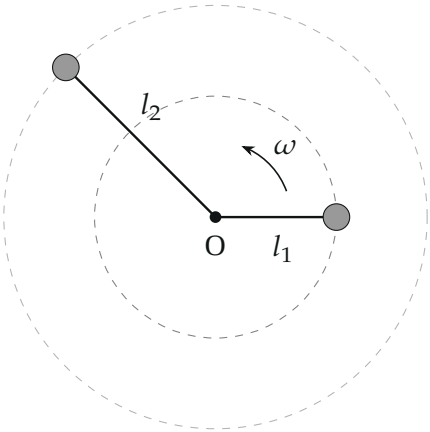
Жгут при увеличении скорости вращения

Задача 1. [Курчатов 2017/18, 10 класс, задача 1] Один конец лёгкого упругого жгута закреплён, а к другому привязан груз, который движется в горизонтальной плоскости по окружности вокруг закреплённого конца жгута, совершая 30 оборотов в минуту, при этом жгут имеет длину $l_1 = 80$ см. После того, как угловую скорость вращения груза увеличили в 2 раза, жгут растянулся до длины $l_2 = 140$ см. Коэффициент жёсткости жгута $k = 632$ Н/м.

1. Рассчитайте начальную угловую скорость вращения ω.
2. Рассчитайте длину жгута l_0 в недеформированном состоянии.
3. Найдите массу m груза.



Поясняющий рисунок (вид сверху): груз на жгуте вращается вокруг точки O; при угловой скорости ω радиус l_1, при 2ω — l_2.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на динамику движения по окружности с упругой силой. Груз движется по окружности радиуса, равного длине жгута; центростремительное ускорение ему сообщает сила упругости жгута, направленная к центру. При большей угловой скорости нужна большая сила — жгут растягивается сильнее. Два состояния дают два уравнения на две неизвестные: l_0 и m.

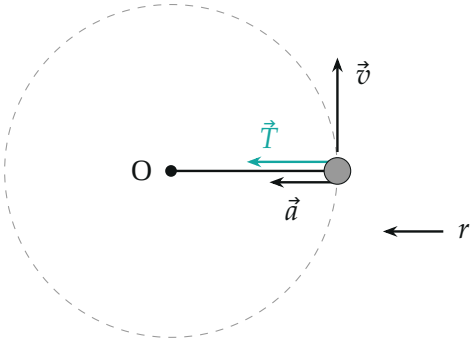
Обозначения. $\nu = 30$ об/мин — частота обращения; ω — начальная угловая скорость; l_0 — длина недеформированного жгута; $T_1 = k(l_1 - l_0)$ и $T_2 = k(l_2 - l_0)$ — силы упругости в двух состояниях; ось r — от груза к центру.

Пункт 1. Угловая скорость. Один оборот — угол 2π; $\nu = 30$ мин$^{-1} = 0{,}5$ с$^{-1}$:

$$\omega = 2\pi\nu = \pi \frac{\text{рад}}{\text{с}} \approx 3{,}14 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Пункт 2. Длина недеформированного жгута.

1. Силы и ускорение. Груз движется в горизонтальной плоскости; вертикальные силы (тяжесть и опора) уравновешены и в уравнение не входят. Единственная горизонтальная сила — сила упругости $\vec{T}$ вдоль жгута к центру; ускорение — центростремительное, $\omega^2 l$ к центру (рисунок 2).



Вид сверху: сила упругости $\vec{T}$ направлена к центру и сообщает грузу центростремительное ускорение $\vec{a}$; скорость $\vec{v}$ — по касательной.

2. Второй закон Ньютона в проекции на ось r для двух состояний (закон Гука для жгута: $T = k(l - l_0)$):

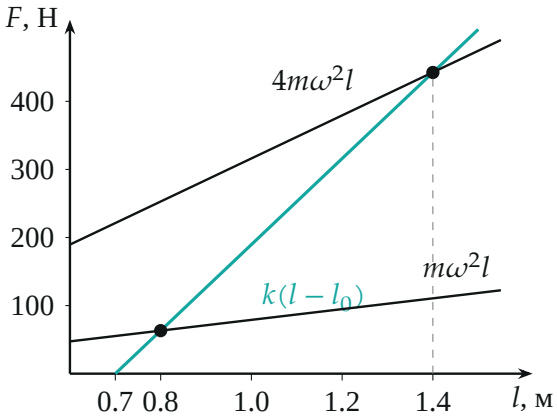
$$\begin{cases} k(l_1 - l_0) = m\omega^2 l_1, \\ k(l_2 - l_0) = m(2\omega)^2 l_2. \end{cases}$$

3. Исключаем m. Делим второе уравнение на первое:

$$\frac{l_2 - l_0}{l_1 - l_0} = \frac{4l_2}{l_1} \quad \Rightarrow \quad l_1(l_2 - l_0) = 4l_2(l_1 - l_0) \quad \Rightarrow \quad l_0 = \frac{3l_1 l_2}{4l_2 - l_1}.$$

$$l_0 = \frac{3 \cdot 80 \cdot 140}{4 \cdot 140 - 80} \text{ см} = \frac{33\,600}{480} \text{ см} = 70 \text{ см}.$$

4. Графическая проверка. Состояние вращения — точка, где прямая силы упругости $T = k(l - l_0)$ пересекает прямую «нужной» силы $m\omega^2 l$ (рисунок 3). При ω пересечение при $l_1 = 80$ см, при 2ω прямая в 4 раза круче и пересекает при $l_2 = 140$ см.

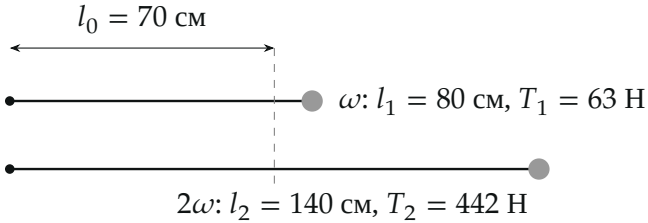


Сила упругости жгута (бирюзовая) и нужная центростремительная сила при ω и 2ω (чёрные), по найденным $l_0 = 0{,}7$ м и $m = 8{,}0$ кг: пересечения — при $l_1 = 0{,}8$ м и $l_2 = 1{,}4$ м.

Пункт 3. Масса груза. Из первого уравнения системы шага 2:

$$m = \frac{k(l_1 - l_0)}{\omega^2 l_1} = \frac{632 \cdot 0{,}1}{\pi^2 \cdot 0{,}8} \text{ кг} = \frac{63{,}2}{7{,}896} \text{ кг} \approx 8{,}0 \text{ кг}.$$

Проверка вторым уравнением: $k(l_2 - l_0) = 632 \cdot 0{,}7 = 442{,}4$ Н и $m(2\omega)^2 l_2 = 8{,}0 \cdot 4\pi^2 \cdot 1{,}4 \approx 442$ Н — сходится.



Жгут в масштабе: недеформированный, при ω (удлинение 10 см) и при 2ω (удлинение 70 см) — удлинение, как и сила, выросло в $4 \cdot 140/80 = 7$ раз.

Обратите внимание. Радиус окружности — это растянутая длина жгута l, а не l_0: при увеличении ω растёт и радиус, поэтому сила растёт не в 4, а в 7 раз.

Ответ:

$$\omega = 2\pi\nu \approx 3{,}14 \text{ рад/с}; \qquad l_0 = \frac{3l_1l_2}{4l_2 - l_1} = 70 \text{ см};$$

$$m = \frac{k(l_1 - l_0)}{\omega^2 l_1} \approx 8{,}0 \text{ кг}.$$

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{Н/м} \cdot \text{м}}{\text{с}^{-2} \cdot \text{м}} = \text{кг}$. $l_0 < l_1 < l_2$ — жгут в обоих случаях растянут, как и должно быть. Если бы жгут был очень жёстким ($l_2 \to l_1$), формула дала бы $l_0 \to l_1$ — растяжения почти нет.

Ответ. 1) $\omega \approx 3{,}14$ рад/с; 2) $l_0 = 70$ см; 3) $m \approx 8{,}0$ кг.