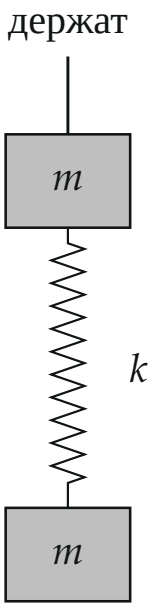
Два груза на вертикальной пружине

Задача 2. [Курчатов 2017/18, 10 класс, задача 2] Два одинаковых груза массой $m = 100$ г каждый соединены лёгкой вертикальной пружиной. Жёсткость пружины $k = 50$ Н/м. Изначально верхний груз удерживают неподвижно, и система находится в равновесии. Затем верхний груз отпускают. Определите начальное удлинение x_1 пружины; максимальное удлинение x_2 пружины в процессе движения. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.



Поясняющий рисунок: верхний груз удерживают, нижний висит на пружине в равновесии.

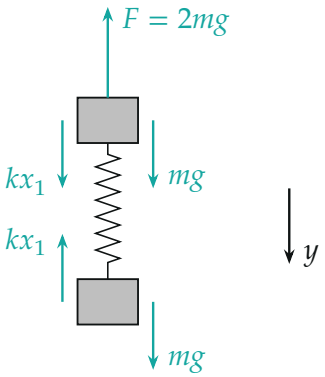
▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на движение системы тел: удобнее всего перейти в систему центра масс. Внешняя сила — только тяжесть $2m\vec{g}$, поэтому центр масс сразу падает с ускорением g. В падающей вместе с ним системе отсчёта тяжесть «выключается» (невесомость), и остаются только два груза на пружине. В момент отпускания пружина растянута на x_1, а грузы относительно центра масс покоятся —

значит, дальше пружина колеблется около *недеформированного* состояния с амплитудой x_1: растянута на x_1, сжата на x_1, снова растянута. Максимальное удлинение равно начальному.

Обозначения. x — удлинение пружины (сжатие — $x < 0$); x_1 — начальное удлинение; ось y — вниз; $y_в$, $y_н$ — координаты верхнего и нижнего грузов, $x = y_н - y_в - L$, где L — длина недеформированной пружины.

1. Начальное удлинение: равновесие нижнего груза (верхний держат). На нижний груз действуют тяжесть mg вниз и пружина kx_1 вверх (рисунок 2):

$$kx_1 = mg \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{mg}{k} = \frac{0{,}1 \cdot 10}{50}\ \text{м} = 0{,}02\ \text{м} = 2\ \text{см}.$$



Силы до отпускания: пружина тянет нижний груз вверх, а верхний — вниз; рука держит $2mg$. После отпускания силы F нет.

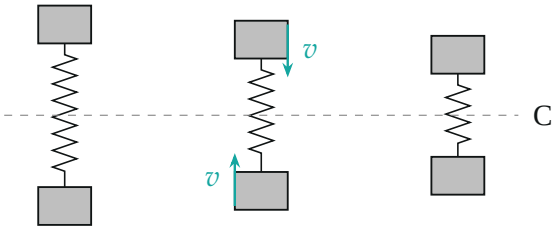
2. Ускорения сразу после отпускания: второй закон Ньютона для каждого груза в проекции на y. Пружина не успела измениться:

$$ma_в = mg + kx_1 = 2mg \ \Rightarrow\ a_в = 2g, \qquad ma_н = mg - kx_1 = 0 \ \Rightarrow\ a_н = 0.$$

Верхний груз догоняет нижний — пружина начинает сокращаться.

3. Центр масс: теорема о движении центра масс. Внешние силы — только $2mg$: $2ma_c = 2mg$, $a_c = g$ (проверка: $(2g + 0)/2 = g$). В системе

отсчёта, падающей с ускорением g, на каждый груз добавляется сила инерции $-m\vec{g}$, и она точно гасит тяжесть: грузы «невесомы», на них действует только пружина.



В системе центра масс C (падает с ускорением g): грузы колеблются симметрично; растяжение x_1 → недеформированная пружина (скорости наибольшие) → сжатие x_1 → снова растяжение x_1.

4. Максимальное удлинение: закон сохранения энергии в системе центра масс. Там на грузы действует только пружина, механическая энергия сохраняется. В начале грузы относительно центра масс покоятся (оба имеют скорость 0, как и центр масс), энергия — только пружины $kx_1^2/2$. Наибольшее удлинение достигается, когда грузы снова неподвижны относительно центра масс:

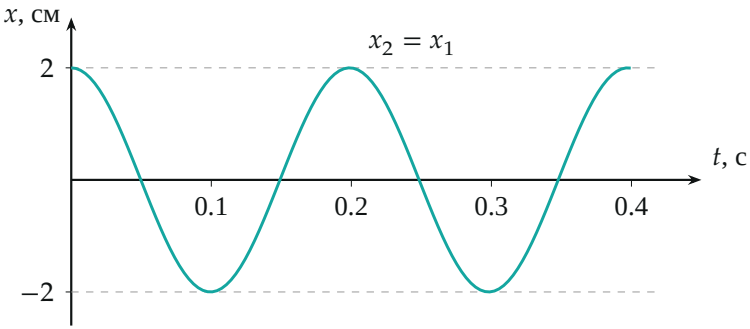
$$\frac{kx_1^2}{2} = \frac{kx^2}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm x_1.$$

Значение $x = +x_1$ — максимальное удлинение, $x = -x_1$ — наибольшее сжатие. Значит, $x_2 = x_1 = 2$ см.

5. Второй способ: уравнение для удлинения. Вычтем уравнения движения грузов (в любой момент): $m\ddot{y}_\text{н} = mg - kx$, $m\ddot{y}_\text{в} = mg + kx$, откуда

$$\ddot{x} = \ddot{y}_\text{н} - \ddot{y}_\text{в} = -\frac{2k}{m}x.$$

Гармонические колебания удлинения около $x = 0$ с частотой $\Omega = \sqrt{2k/m} = \sqrt{1000} \approx 31{,}6$ рад/с; начальные условия $x(0) = x_1$, $\dot{x}(0) = 0$ дают $x = x_1 \cos \Omega t$ — удлинение не превосходит x_1 (рисунок 4).



Удлинение пружины от времени $x = x_1 \cos \Omega t$ при $m = 0{,}1$ кг, $k = 50$ Н/м (период $2\pi/\Omega \approx 0{,}2$ с): оно колеблется от $+2$ до -2 см.

Обратите внимание. Ответ $x_2 = x_1$ кажется странным: «отпустили — значит, пружина ещё растянется». Но отпустили *верхний* груз: он сразу разгоняется до $2g$ и сокращает пружину, а нижний в первый момент вообще не двигается.

Ответ: $x_1 = \dfrac{mg}{k} = 2$ см; $x_2 = x_1 = 2$ см.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{кг} \cdot \text{м/с}^2}{\text{Н/м}} =$ м. Второй способ в системе Земли (как у организаторов): в момент $x = x_2$ скорости грузов равны, а значит, равны скорости центра масс gt; центр масс опустился на $gt^2/2$, работа тяжести $2mg \cdot gt^2/2 = m(gt)^2$ равна кинетической энергии $2m(gt)^2/2$ — целиком, и энергия пружины осталась прежней: $kx_2^2/2 = kx_1^2/2$.

Ответ. $x_1 = 2$ см; $x_2 = 2$ см.