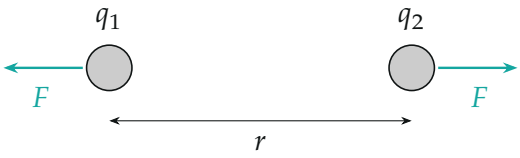
Заряженные шарики

Задача 3. [Курчатов 2017/18, 10 класс, задача 3] Два заряженных металлических шарика отталкиваются друг от друга с силой 3 мН. После того, как каждому шарику, не меняя расстояние между ними, сообщили дополнительный заряд +0,2 мкКл, шарики вновь стали отталкиваться с силой 3 мН. Затем шарики привели в контакт, после чего вновь расположили на том же расстоянии друг от друга, и снова оказалось, что шарики отталкиваются с силой 3 мН. Найдите исходные заряды шариков и расстояние между ними. Форма и размеры шариков одинаковы, размеры шариков много меньше расстояния между ними. Постоянная в законе Кулона $k \approx 9 \cdot 10^9$ (Н·м^2)/Кл^2.



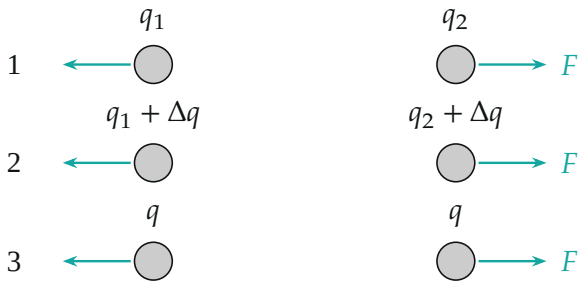
Поясняющий рисунок: шарики с зарядами q_1, q_2 на расстоянии r отталкиваются с силой $F = 3$ мН.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на закон Кулона и закон сохранения заряда. Расстояние не меняется, сила тоже — значит, во всех трёх состояниях одинаково произведение зарядов. Два равенства произведений дают два уравнения на q_1 и q_2; контакт одинаковых шариков делит суммарный заряд поровну. Расстояние находится уже из самого закона Кулона.

Обозначения. q_1, q_2 — исходные заряды; $\Delta q = +0{,}2$ мкКл — добавка каждому; q — заряд каждого шарика после контакта; $F = 3$ мН; r — расстояние.

1. Закон Кулона в трёх состояниях. Шарики малы по сравнению с r — точечные заряды; сила отталкивания $F = kQ_1Q_2/r^2$ при $Q_1Q_2 > 0$. Так как F и r одни и те же,

$$q_1q_2 = (q_1 + \Delta q)(q_2 + \Delta q) = q^2 = \frac{Fr^2}{k} > 0.$$



Три состояния на одном расстоянии r: исходное, после добавки Δq каждому, после контакта; сила всё время одна и та же F.

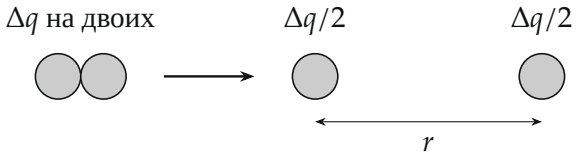
2. Первое и второе состояния. Раскрываем скобки:

$$q_1 q_2 = q_1 q_2 + \Delta q(q_1 + q_2) + \Delta q^2 \quad \Rightarrow \quad q_1 + q_2 = -\Delta q.$$

Сумма исходных зарядов отрицательна, а произведение положительно — оба заряда отрицательные.

3. Контакт: закон сохранения заряда. Перед контактом суммарный заряд $q_1 + q_2 + 2\Delta q = \Delta q$. Шарики одинаковые — после контакта заряд делится поровну:

$$2q = \Delta q \quad \Rightarrow \quad q = \frac{\Delta q}{2} = +0{,}1 \text{ мкКл}.$$



Контакт одинаковых шариков: общий заряд $q_1 + q_2 + 2\Delta q = \Delta q$ делится поровну.

4. Исходные заряды. Первое и третье состояния: $q_1 q_2 = q^2 = \Delta q^2/4$, вместе с $q_2 = -\Delta q - q_1$:

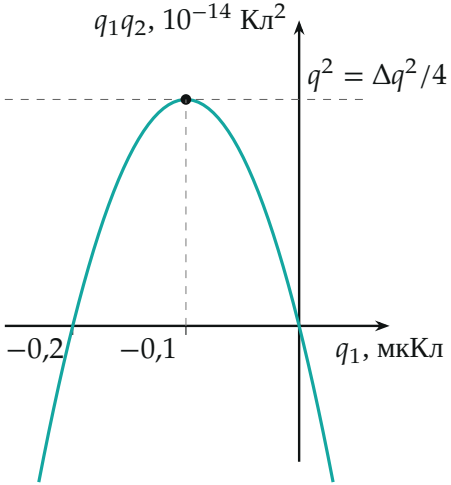
$$q_1(-\Delta q - q_1) = \frac{\Delta q^2}{4},$$

$$q_1^2 + \Delta q\, q_1 + \frac{\Delta q^2}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(q_1 + \frac{\Delta q}{2}\right)^2 = 0.$$

Единственный (двойной) корень:

$$q_1 = q_2 = -\frac{\Delta q}{2} = -0{,}1 \text{ мкКл}.$$

На рисунке 4 — произведение $q_1 q_2 = q_1(-\Delta q - q_1)$ как функция q_1: парабола, максимум которой как раз равен $\Delta q^2/4$. Значит, равенство возможно только в вершине — заряды равны.



Произведение зарядов при условии $q_1 + q_2 = -\Delta q$: его наибольшее значение $\Delta q^2/4$ достигается только при $q_1 = q_2 = -0{,}1$ мкКл.

5. Расстояние: закон Кулона для третьего состояния.

$$F = k\frac{q^2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad r = q\sqrt{\frac{k}{F}} = \frac{\Delta q}{2}\sqrt{\frac{k}{F}},$$

$$r = 10^{-7} \cdot \sqrt{\frac{9 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^{-3}}} \text{ м} = 10^{-7} \cdot 1{,}73 \cdot 10^6 \text{ м} \approx 0{,}17 \text{ м}.$$

Обратите внимание. Сила одинакова при одинаковом произведении

зарядов, а не при одинаковых зарядах: исходные $-0{,}1$ и $-0{,}1$ мкКл, после добавки $+0{,}1$ и $+0{,}1$ мкКл — знак сменился, а сила та же.

Ответ: $q_1 = q_2 = -\dfrac{\Delta q}{2} = -0{,}1$ мкКл; $r = \dfrac{\Delta q}{2}\sqrt{\dfrac{k}{F}} \approx 17$ см.

Проверка. Размерность: Кл $\cdot \sqrt{\dfrac{\text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{Кл}^2}{\text{Н}}} =$ м. Все три состояния: $(-0{,}1)(-0{,}1) = (+0{,}1)(+0{,}1) = (+0{,}1)(+0{,}1) = 0{,}01$ мкКл^2 — силы равны; $9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-14}/0{,}0300 = 3{,}0 \cdot 10^{-3}$ Н.

Ответ. $q_1 = q_2 = -0{,}1$ мкКл; $r \approx 17$ см.