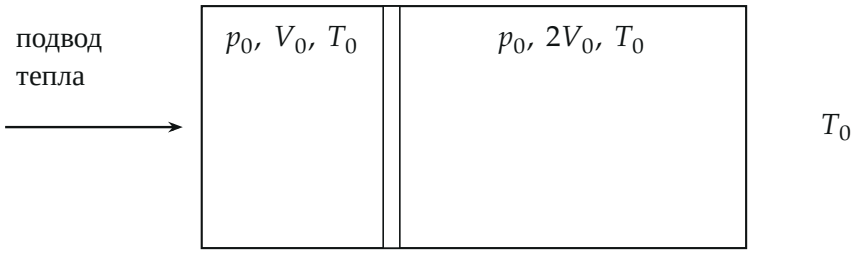
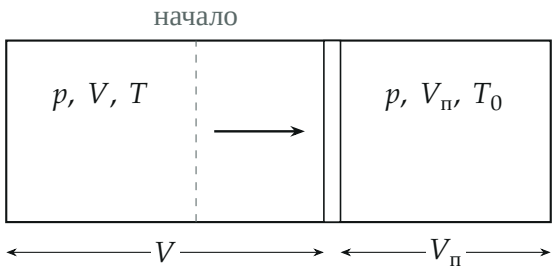
Газ по обе стороны поршня

Задача 4. [Курчатов 2017/18, 10 класс, задача 4] Герметичный цилиндрический сосуд расположен горизонтально и разделён на две части лёгким теплонепроницаемым поршнем, свободно перемещающимся без трения. Боковые стенки сосуда теплоизолированы, а через торцы возможна теплопередача. В обеих частях сосуда находится идеальный газ, начальная температура и давление равны T_0 и p_0 соответственно, начальный объём левой части сосуда равен V_0, правой части — $2V_0$. Газ слева от поршня начинают нагревать через левый торец, а газ справа от поршня свободно обменивается теплом с окружающей средой, температура которой остаётся постоянной и равной T_0 (рис. 1). Постройте на pV-диаграмме график процесса, происходящего с газом в левой части сосуда. Приведите необходимые пояснения.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на газ в двух отсеках, связанных подвижным поршнем. Поршень лёгкий и движется без трения, поэтому давление слева и справа всегда одно и то же. Сумма объёмов постоянна: насколько расширился левый газ, настолько сжался правый. Правый газ всё время при температуре T_0 — его процесс изотермический, и его график известен. Значит, и левый газ идёт по известной кривой: её получим из изотермы правого газа, заменив его объём на объём левого.

Обозначения. V — объём левой части, $V_{\text{п}}$ — объём правой части; p — общее давление; T — температура левого газа.



Промежуточное состояние: левый газ нагрелся и сдвинул поршень вправо; давление по обе стороны одно и то же.

1. Связь давлений: второй закон Ньютона для поршня. Поршень лёгкий (масса пренебрежимо мала) и трения нет, поэтому в проекции на ось цилиндра $pS - p_{\text{п}}S = ma \approx 0$, то есть давления слева и справа равны в любой момент:

$$p_{\text{лев}} = p_{\text{п}} = p.$$

2. Связь объёмов. Сосуд герметичный и жёсткий, общий объём $V_0 + 2V_0 = 3V_0$ не меняется:

$$V + V_{\text{п}} = 3V_0 \quad \Rightarrow \quad V_{\text{п}} = 3V_0 - V.$$

3. Процесс правого газа: закон Бойля — Мариотта. Правый газ через торец свободно обменивается теплом со средой при T_0, а поршень теплонепроницаемый — значит, температура правого газа остаётся T_0 (нагрев слева идёт медленно, через стенку). Масса правого газа постоянна, поэтому

$$pV_{\text{п}} = p_0 \cdot 2V_0.$$

На pV-диаграмме это изотерма — гипербола $p = 2p_0V_0/V_{\text{п}}$; она проходит через начальную точку правого газа $(2V_0;\ p_0)$.

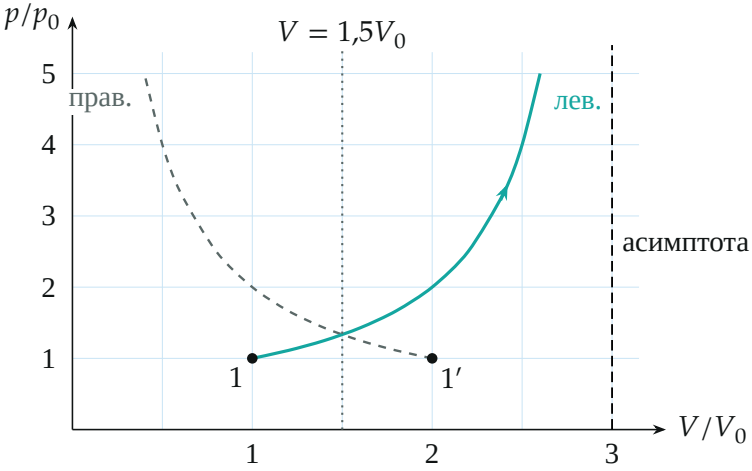
4. Процесс левого газа. Подставим объём из шага 2:

$$p = \frac{2p_0V_0}{3V_0 - V}, \qquad V \geqslant V_0.$$

Это та же гипербола, только объём отсчитывается от $3V_0$ в обратную сторону: график левого газа — зеркальное отражение изотермы правого

газа относительно вертикали $V = \dfrac{3V_0}{2}$ (точка $V_\text{п} = 2V_0$ переходит в $V = V_0$). Кривая начинается в точке $(V_0;\ p_0)$ и идёт вверх, круче и круче; при $V \to 3V_0$ давление неограниченно растёт — прямая $V = 3V_0$ является вертикальной асимптотой. Точки посчитаны по формуле (рисунок 3):

V/V_0	1	1,4	1,8	2	2,2	2,4	2,5	2,6
p/p_0	1	1,25	1,67	2	2,5	3,33	4	5



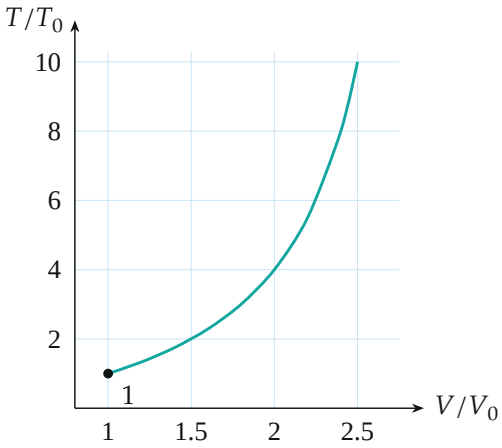
Пунктир — изотерма правого газа (из точки $1'$ влево), сплошная бирюзовая — процесс левого газа (из точки 1 вправо): зеркальные относительно $V = 1{,}5V_0$; штрих — асимптота $V = 3V_0$.

5. Что при этом с температурой левого газа: уравнение Менделеева — Клапейрона. Масса левого газа постоянна, поэтому $\dfrac{pV}{T} = \dfrac{p_0V_0}{T_0}$:

$$T = T_0\,\frac{pV}{p_0V_0} = T_0\,\frac{2V}{3V_0 - V}.$$

При $V = V_0$ получаем $T = T_0$ — совпадает с началом; дальше температура растёт без ограничения (рисунок 4). Значит, сдвигать поршень

вправо можно сколько угодно далеко, но каждый следующий сантиметр требует всё большего нагрева: правый газ при сжатии в изотерме «упирается» всё сильнее.



Температура левого газа $T = T_0 \cdot 2V/(3V_0 - V)$ растёт неограниченно при приближении V к $3V_0$.

Обратите внимание. График строят для левого газа, а не для правого: изотерма $p \propto 1/V$ принадлежит правому газу, у левого давление при расширении *растёт*. Левый газ при этом получает тепло и совершает работу над правым.

Ответ: процесс левого газа — кривая

$$p = \frac{2p_0V_0}{3V_0 - V},$$

начинается в точке $(V_0;\, p_0)$, возрастает, имеет вертикальную асимптоту $V = 3V_0$; это изотерма правого газа, отражённая относительно прямой $V = 1{,}5V_0$.

Проверка. Размерность: p_0V_0/V_0 — давление. В начале $V = V_0$: $p = 2p_0V_0/2V_0 = p_0$ — верно. Предел $V \to 3V_0$: правый газ сжат в точку, давление бесконечно — верно. Произведение $pV_{\text{п}} = 2p_0V_0$ во всех точках таблицы (python) — изотерма правого газа выполнена.

Ответ. $p = \dfrac{2p_0V_0}{3V_0 - V}$ при $V \geqslant V_0$: возрастающая кривая из точки $(V_0;\ p_0)$ с вертикальной асимптотой $V = 3V_0$ — зеркальное отражение изотермы правого газа $pV_{\text{п}} = 2p_0V_0$ относительно $V = 1{,}5V_0$.