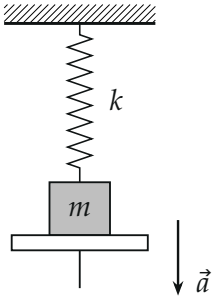
# Груз на подставке и пружина

**Задача 1.** [Курчатов 2017/18, 11 класс, задача 1] На горизонтальной подставке лежит груз, прикреплённый к потолку вертикальной нерастянутой пружиной. Подставка начинает опускаться вниз с постоянным ускорением $a = \frac{2g}{5}$, $g$ — ускорение свободного падения. Найдите, за какой промежуток времени $\tau$ после отрыва груза от подставки пружина растянется на максимальную длину. Известен период $T$ свободных колебаний груза на пружине.




*Поясняющий рисунок: пружина жёсткостью $k$ сначала не растянута, подставка уходит вниз с ускорением $\vec{a}$.*

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на гармонические колебания с начальными условиями. Пока груз лежит на подставке, он движется вместе с ней равноускоренно, а пружина растягивается и всё сильнее тянет его вверх. Подставка давит на груз всё слабее; когда сила её реакции обращается в нуль, груз отрывается. Дальше на него действуют только сила тяжести и пружина — это свободные гармонические колебания около положения равновесия. Груз в момент отрыва ещё *выше* положения равновесия и летит вниз, поэтому до нижней точки (максимального растяжения) ему нужно больше четверти периода: путь до равновесия плюс $T/4$.

**Обозначения.** $m$ — масса груза, $k$ — жёсткость пружины, $\omega = \sqrt{k/m} = 2\pi/T$; ось $x$ — вниз, $x$ — растяжение пружины (отсчёт от положения нерастянутой пружины); $N$ — сила реакции подставки;

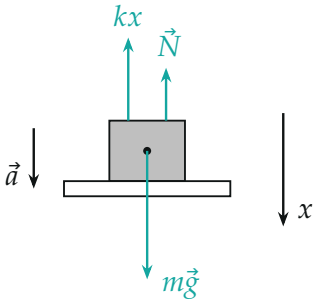
$x_0$, $V_0$ — координата и скорость в момент отрыва; $x_p$ — положение равновесия; $y = x - x_p$; $A$ — амплитуда.

**1. Момент отрыва: второй закон Ньютона для груза на подставке в проекции на ось $x$.** На груз действуют сила тяжести $m\vec{g}$ вниз, сила упругости $kx$ вверх и реакция $\vec{N}$ вверх (рисунок 2), ускорение — $a$ вниз:

$$ma = mg - kx - N.$$

Груз отрывается, когда $N$ обращается в нуль:

$$ma = mg - kx_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{m(g-a)}{k} = \frac{g-a}{\omega^2}.$$




*Силы на груз, пока он на подставке: тяжесть вниз, пружина и подставка вверх; ось x — вниз.*

**2. Скорость в момент отрыва: равноускоренное движение с подставкой.** С начала движения до отрыва груз идёт с подставкой без начальной скорости: $x_0 = \dfrac{V_0^2}{2a}$, откуда

$$V_0 = \sqrt{2ax_0} = \frac{\sqrt{2a(g-a)}}{\omega}.$$

**3. Положение равновесия и начальное смещение от него.** После отрыва второй закон Ньютона: $m\ddot{x} = mg - kx$. Положение равновесия $kx_p = mg$, $x_p = g/\omega^2$. В координате $y = x - x_p$ уравнение принимает

вид $\ddot{y} = -\omega^2 y$ — гармонические колебания с периодом $T$. Начальное смещение

$$y_0 = x_0 - x_p = \frac{g-a}{\omega^2} - \frac{g}{\omega^2} = -\frac{a}{\omega^2}:$$

знак минус — в момент отрыва груз выше положения равновесия на $a/\omega^2$ (рисунок 3).




*Положения груза на оси $x$ (в масштабе для $a = 2g/5$): отрыв выше равновесия на $a/\omega^2$, нижняя точка — ниже равновесия на амплитуду $A$.*

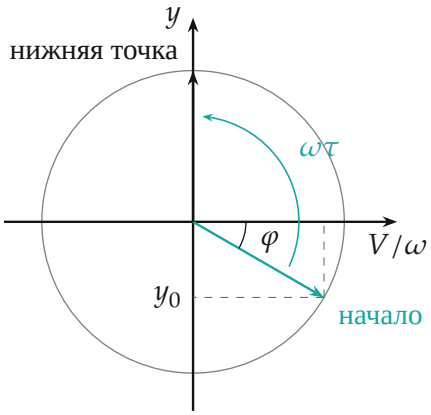
**4. Фаза в момент отрыва: векторная диаграмма колебаний.** Запишем $y = A\sin(\omega t + \varphi)$, $V = \omega A\cos(\omega t + \varphi)$, время — от отрыва. При $t = 0$:

$$y_0 = A\sin\varphi, \qquad V_0 = \omega A\cos\varphi,$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega y_0}{V_0} = -\frac{a}{\sqrt{2a(g-a)}} = -\sqrt{\frac{a}{2(g-a)}}.$$

$y_0 < 0$, $V_0 > 0$ — угол $\varphi$ в четвёртой четверти, $\varphi = -\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{a}{2(g-a)}}$.

Для $a = 2g/5$: $\operatorname{tg}\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\varphi = -\dfrac{\pi}{6}$.




*Вектор амплитуды $A$ поворачивается с угловой скоростью $\omega$: от угла $\varphi = -30°$ (отрыв) до $90°$ (скорость нуль, $y = A$) — поворот на $120°$, треть оборота.*

**5. Момент максимального растяжения.** Пружина растянута сильнее всего, когда груз в нижней точке, то есть его скорость равна нулю:

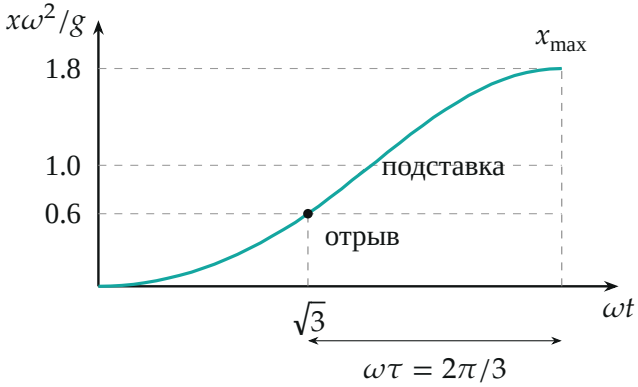
$$\cos(\omega\tau + \varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega\tau + \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{T}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

$$\tau = \frac{T}{4} + \frac{T}{2\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{2(g-a)}}.$$

Второй способ того же шага: $\tau = \tau' + T/4$, где $\tau'$ — время от отрыва до положения равновесия ($y = 0$, $\omega\tau' = -\varphi$), а $T/4$ — от равновесия до нижней точки. При $a = 2g/5$:

$$\tau = \frac{T}{4} + \frac{T}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{T}{4} + \frac{T}{12} = \frac{T}{3}.$$

**6. График движения.** На рисунке 5 — растяжение $x(t)$, посчитанное по формулам шагов 1–4 (и численным решением уравнения движения — результаты совпали): парабола до отрыва, затем синусоида с амплитудой $A = \sqrt{y_0^2 + V_0^2/\omega^2} = \sqrt{a(2g-a)}/\omega^2 = 0{,}8\,g/\omega^2$.




*Растяжение пружины от времени при $a = 2g/5$ (по вычисленным точкам): до отрыва груз движется с подставкой по параболе, после — по синусоиде; пунктир — подставка.*

**Обратите внимание.** Отрыв происходит не в положении равновесия, а выше него: в момент отрыва пружина ещё не уравновешивает тяжесть ($kx_0 = m(g-a) < mg$). Поэтому ответ не $T/4$.

**Ответ:** $\tau = \dfrac{T}{4} + \dfrac{T}{2\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{a}{2(g-a)}} = \dfrac{T}{3}$.

**Проверка.** Размерность: arctg безразмерен, $\tau$ — в единицах $T$. Предел $a \to 0$ (подставку опускают бесконечно медленно): груз отрывается в положении равновесия без скорости, колебаний нет; формула даёт $\tau \to T/4$ — в этом пределе амплитуда стремится к нулю, и время до «нижней точки» — четверть периода, как и должно быть. Предел $a \to g$: груз отрывается сразу ($x_0 = 0$), arctg $\to \pi/2$, $\tau \to T/2$ — от верхней точки (нерастянутая пружина, скорость $\approx 0$) до нижней полпериода. Численное решение уравнения движения даёт $\tau = 0{,}33333\,T$.

**Ответ.** $\tau = \dfrac{T}{4} + \dfrac{T}{2\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{a}{2(g-a)}} = \dfrac{T}{3}$.