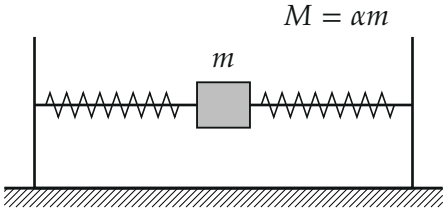
Ящик с муфтой на пружинах

Задача 2. [Курчатов 2017/18, 11 класс, задача 2] На льду стоит ящик, две противоположные стенки которого скреплены жёстким горизонтальным стержнем. По стержню может скользить, не касаясь дна ящика, муфта, соединённая пружинами с концами стержня. Сначала ящик и муфта неподвижны, пружины не деформированы. Коротким ударом ящику сообщают некоторую скорость в направлении стержня. Найдите отношение x минимальной и максимальной скоростей ящика при движении. Известно отношение α массы ящика к массе муфты: $\alpha = 9$. Считайте, что за время удара пружины не успевают деформироваться. Массами стержня и пружин, а также трением пренебрегите.



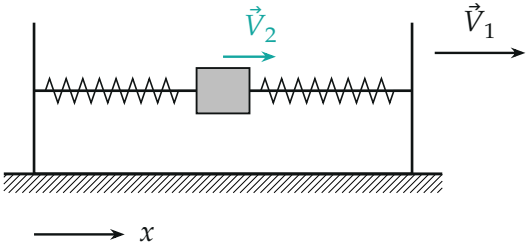
Поясняющий рисунок: ящик массы M на льду, стержень между стенками, муфта m на двух пружинах.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на законы сохранения в замкнутой системе с упругой связью. Удар разгоняет только ящик: пружины за время удара не деформировались, значит, муфта ещё стоит. Дальше пружины передают импульс между ящиком и муфтой: ящик то тормозится, то разгоняется, а центр масс системы едет с постоянной скоростью (по горизонтали внешних сил нет). Скорость ящика экстремальна, когда его ускорение равно нулю — когда пружины не деформированы.

Обозначения. $M = \alpha m$ — масса ящика, m — муфты; V_0 — скорость ящика сразу после удара; V_1, V_2 — проекции скоростей ящика и муфты на ось x вдоль $\vec{V}_0$ в момент, когда пружины не деформированы; V_c — скорость центра масс.

1. Где скорость ящика экстремальна. Второй закон Ньютона для ящика в проекции на x: $M\dot{V}_1 = F$, где F — суммарная сила пружин

со стороны стержня. Экстремум скорости — там, где $\dot{V}_1 = 0$, то есть $F = 0$: обе пружины не деформированы, муфта в среднем положении. В этот момент энергия пружин равна нулю.



Момент, когда пружины не деформированы: скорости ящика $\vec{V}_1$ и муфты $\vec{V}_2$ вдоль оси x; сразу после удара $V_1 = V_0$, $V_2 = 0$.

2. Закон сохранения импульса системы ящик + муфта в проекции на x (внешние горизонтальные силы отсутствуют):

$$MV_0 = MV_1 + mV_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha(V_0 - V_1) = V_2.$$

3. Закон сохранения механической энергии (трения нет, пружины в этот момент не деформированы):

$$\frac{MV_0^2}{2} = \frac{MV_1^2}{2} + \frac{mV_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha(V_0^2 - V_1^2) = V_2^2.$$

4. Решаем систему. Подставим V_2 из шага 2 в шаг 3:

$$\alpha(V_0 - V_1)(V_0 + V_1) = \alpha^2(V_0 - V_1)^2,$$

$$(V_0 - V_1)[\alpha(V_0 - V_1) - (V_0 + V_1)] = 0.$$

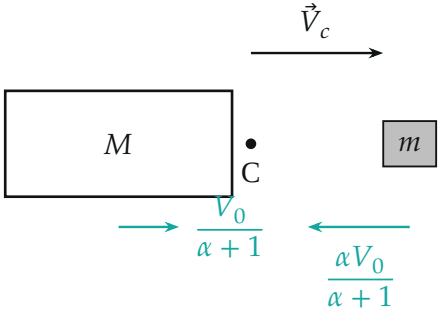
Два корня: $V_1 = V_0$ (начальное состояние — максимум) и

$$V_1 = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} V_0 \quad \text{(минимум)}.$$

Так как $\alpha > 1$, вторая скорость положительна: ящик не останавливается и не едет назад.

5. Второй способ: система центра масс. Скорость центра масс постоянна:

$$V_c = \frac{MV_0}{M+m} = \frac{\alpha}{\alpha+1}V_0.$$

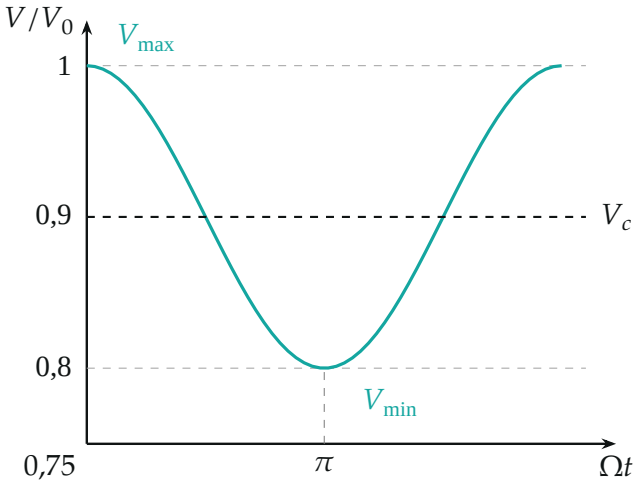


Сразу после удара в системе центра масс C: ящик и муфта движутся навстречу с импульсами, равными по модулю; сама C едет со скоростью $\vec{V}_c$ (чёрная стрелка).

В системе центра масс ящик сразу после удара имеет скорость $V_0 - V_c = \frac{V_0}{\alpha+1}$, и его движение относительно центра масс — гармонические колебания: скорость меняется от $+\frac{V_0}{\alpha+1}$ до $-\frac{V_0}{\alpha+1}$. Возвращаясь в систему льда:

$$V_{\max} = V_c + \frac{V_0}{\alpha+1} = V_0, \qquad V_{\min} = V_c - \frac{V_0}{\alpha+1} = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}V_0.$$

Ответ тот же. На рисунке 3 — скорость ящика $V_1(t) = V_c + \frac{V_0}{\alpha+1}\cos\Omega t$ при $\alpha = 9$ (Ω — частота колебаний системы).



Скорость ящика от времени при $\alpha = 9$ (по формуле второго способа): колебания около скорости центра масс $0{,}9\,V_0$ от V_0 до $0{,}8\,V_0$.

6. Искомое отношение.

$$x = \frac{V_{\min}}{V_{\max}} = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} = \frac{9 - 1}{9 + 1} = 0{,}8.$$

Обратите внимание. Скорость центра масс — не средняя скорость двух тел, а $\alpha V_0/(\alpha + 1)$: тяжёлый ящик «держит» центр масс возле себя, поэтому скорость ящика меняется мало.

Ответ: $x = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1} = 0{,}8.$

Проверка. Безразмерно, как и должно быть отношение скоростей. Предел $\alpha \to \infty$ (муфта невесома): $x \to 1$, ящик не замечает муфты. Предел $\alpha = 1$: $x = 0$ — как при упругом ударе равных масс, ящик на мгновение останавливается, передав всю скорость муфте. Численная проверка: при $\alpha = 9$, $V_0 = 1$ из шагов 2–3 $V_1 = 0{,}8$, $V_2 = 1{,}8$; импульс $9 \cdot 0{,}8 + 1{,}8 = 9$, энергия $9 \cdot 0{,}64 + 3{,}24 = 9$ — сходятся.

Ответ. $x = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1} = 0{,}8.$