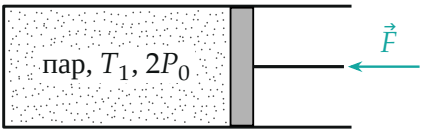
Конденсация водяного пара

Задача 3. [Курчатов 2017/18, 11 класс, задача 3] Горизонтальный цилиндр закрыт свободно скользящим поршнем. В цилиндре находится водяной пар при температуре $T_1 = 453$ К и давлении $2P_0$, $P_0 = 0{,}1$ МПа. Пар изохорически охлаждают до температуры $T_2 = 373$ К, а затем изотермически уменьшают его объём в 2 раза. При этом внешние силы, действующие на поршень, совершают работу $A = 450$ Дж. Найдите массу m сконденсировавшейся воды. Давление насыщенного пара при температурах T_1 и T_2 равно соответственно $10P_0$ и P_0, молярная масса воды $\mu = 18$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К). Объёмом воды по сравнению с объёмом пара пренебрегите, пар считайте идеальным газом. Ответ выразите в граммах и округлите до целого.



Поясняющий рисунок: пар под поршнем; на втором этапе внешняя сила $\vec{F}$ вдвигает поршень.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на насыщенный пар. Сначала надо понять, насыщен ли пар в каждом состоянии. В начале давление $2P_0$ меньше давления насыщения $10P_0$ — пар ненасыщенный, это обычный идеальный газ. При охлаждении давление насыщения падает в 10 раз, а давление пара — лишь пропорционально T; если пару «не хватит места», часть его сконденсируется, и давление станет равным P_0. Тогда изотермическое сжатие пойдёт при постоянном давлении P_0: работа считается просто, и из неё находится объём, а значит, и количество пара.

Обозначения. V_1 — объём цилиндра на первом этапе; ν_1 — начальное количество пара (моль); $V_\text{н}$ — объём, в котором ν_1 молей при T_2 были бы как раз насыщенными; ν — количество сконденсировавшейся воды.

1. Начальное состояние: уравнение Менделеева — Клапейрона для ненасыщенного пара:

$$2P_0V_1 = \nu_1 RT_1.$$

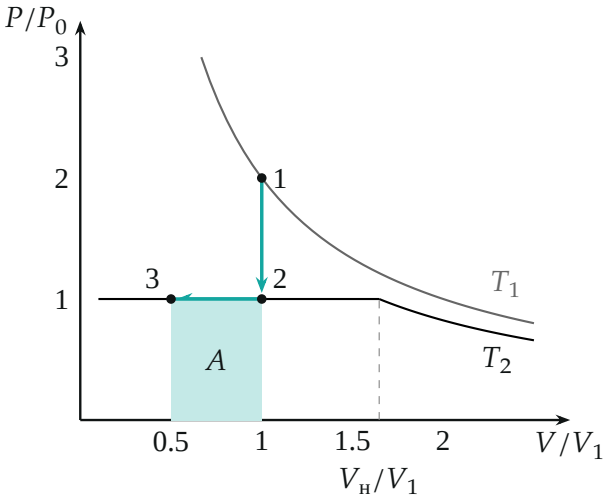
2. Насыщен ли пар после охлаждения. Если бы весь пар остался паром при T_2 и давлении насыщения P_0, он занимал бы объём $V_н$:

$$P_0V_н = \nu_1 RT_2.$$

Делим уравнение шага 1 на это:

$$\frac{2V_1}{V_н} = \frac{T_1}{T_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_1}{V_н} = \frac{T_1}{2T_2} = \frac{453}{746} \approx 0{,}61 < 1.$$

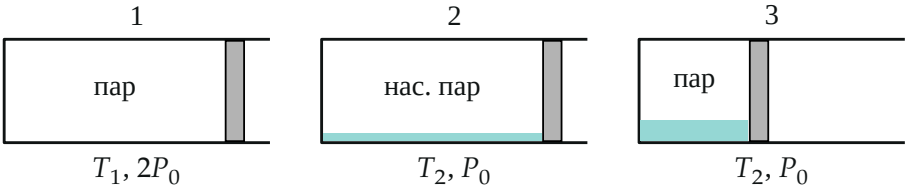
Объём V_1 меньше $V_н$: весь пар при T_2 в нём не помещается, часть конденсируется уже при изохорном охлаждении, и в конце первого этапа пар насыщенный, давление P_0 (точка 2 на рисунке 2).



Процесс на диаграмме (V, P) (в масштабе): изохора 1–2 до горизонтального участка изотермы T_2, затем сжатие 2–3 при постоянном давлении P_0; работа внешних сил — площадь под 2–3.

3. Работа при изотермическом сжатии насыщенного пара. На участке 2–3 пар остаётся насыщенным (лишний конденсируется), давление постоянно и равно P_0. Работа внешних сил — площадь прямоугольника под 2–3:

$$A = P_0\left(V_1 - \frac{V_1}{2}\right) = \frac{P_0V_1}{2} \quad \Rightarrow \quad P_0V_1 = 2A.$$



Три состояния: 1 — ненасыщенный пар; 2 — после охлаждения пар насыщен, на дне немного воды (бирюзой); 3 — объём вдвое меньше, воды больше.

4. Начальное количество пара. Из шагов 1 и 3:

$$\nu_1 = \frac{2P_0V_1}{RT_1} = \frac{4A}{RT_1}.$$

5. Конечное количество пара: уравнение Менделеева — Клапейрона для насыщенного пара в состоянии 3 (объём воды не учитываем):

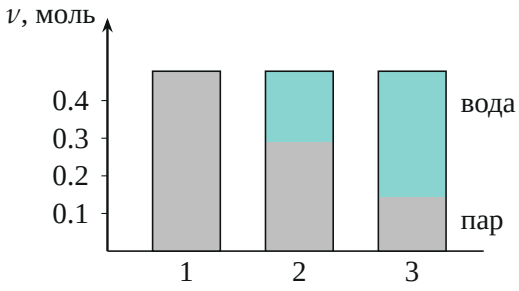
$$P_0\frac{V_1}{2} = (\nu_1 - \nu)RT_2 \quad \Rightarrow \quad \nu = \nu_1 - \frac{P_0V_1}{2RT_2} = \frac{4A}{RT_1} - \frac{A}{RT_2}.$$

6. Масса сконденсировавшейся воды.

$$m = \mu\nu = \frac{\mu A(4T_2 - T_1)}{RT_1T_2}$$

$$m = \frac{0{,}018 \cdot 450 \cdot (4 \cdot 373 - 453)}{8{,}31 \cdot 453 \cdot 373}\ \text{кг} \approx 5{,}99 \cdot 10^{-3}\ \text{кг} \approx 6\ \text{г}.$$

Сюда входит и вода, сконденсировавшаяся при охлаждении (её $\nu_1 - P_0V_1/(RT_2)$, 0,188 моль, около 3,4 г), и при сжатии (половина оставшегося пара, около 2,6 г).



Количество вещества в состояниях 1, 2, 3 (по числам задачи): серым — пар, бирюзой — сконденсировавшаяся вода; сумма всё время $\nu_1 \approx 0{,}478$ моль.

Обратите внимание. Насыщенный пар при изотермическом сжатии — не газ из закона Бойля — Мариотта: давление не растёт, лишний пар конденсируется. Поэтому работа — $P_0\Delta V$, а не $\nu RT\ln 2$.

Ответ: $m = \dfrac{\mu A(4T_2 - T_1)}{RT_1T_2} \approx 6$ г.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{кг/моль} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{Дж/(моль}\cdot\text{К)} \cdot \text{К}^2} = \text{кг}$. Числа: $P_0V_1 = 900$ Дж, $V_1 = 9$ л, $\nu_1 = 1800/(8{,}31 \cdot 453) \approx 0{,}478$ моль, в состоянии 3 пара $450/(8{,}31 \cdot 373) \approx 0{,}145$ моль; конденсат 0,333 моль $\cdot$ 18 г/моль $\approx$ 6 г. При $4T_2 < T_1$ формула дала бы $m < 0$ — это значило бы, что пар после охлаждения не насыщен (условие шага 2 нарушено).

Ответ. $m = \dfrac{\mu A(4T_2 - T_1)}{RT_1T_2} \approx 6$ г.