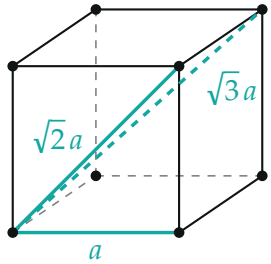
Заряды в вершинах куба

Задача 4. [Курчатов 2017/18, 11 класс, задача 4] Расположите 4 заряда величины $+q$ и 4 заряда величины $-q$ в вершинах куба со стороной a, таким образом, чтобы энергия электростатического взаимодействия всех зарядов была минимальной. Найдите величину этой энергии.



Поясняющий рисунок: от одной вершины куба до остальных — три вида расстояний: ребро a, диагональ грани $\sqrt{2}\,a$, диагональ куба $\sqrt{3}\,a$ (бирюзой).

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на энергию системы точечных зарядов. Энергия — сумма энергий всех пар; разноимённая пара даёт отрицательный вклад, одноимённая — положительный, и чем ближе пара, тем больше вклад по модулю. Значит, выгодно сделать разноимёнными прежде всего самые близкие пары — соседей по ребру. Оказывается, это можно сделать для всех 12 рёбер сразу (заряды чередуются, как ионы в кристалле NaCl), и такая расстановка действительно лучшая — это проверяется полным перебором.

Обозначения. $W_1 = \dfrac{kq^2}{a}$ — модуль энергии пары на ребре; n_1, n_2, n_3 — число *разноимённых* пар на рёбрах, диагоналях граней и диагоналях куба; W — энергия системы.

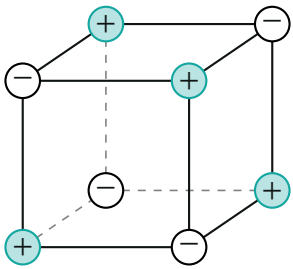
1. Пары зарядов: сколько их и на каких расстояниях. Всего пар $\dfrac{8\cdot 7}{2} = 28$: 12 рёбер (расстояние a), 12 диагоналей граней (по две на каждой из 6 граней, $\sqrt{2}\,a$) и 4 диагонали куба ($\sqrt{3}\,a$); $12 + 12 + 4 = 28$. Энергия пары зарядов q_i, q_j на расстоянии r — kq_iq_j/r.

2. Энергия как функция расстановки. Одноимённая пара даёт $+kq^2/r$, разноимённая $-kq^2/r$, поэтому

$$W = W_1\left[(12-2n_1) + \frac{12-2n_2}{\sqrt{2}} + \frac{4-2n_3}{\sqrt{3}}\right].$$

Минимум требует как можно больше разноимённых пар, в первую очередь на рёбрах (у них коэффициент самый большой).

3. Расстановка «как в NaCl». Поставим заряды так, чтобы на каждом ребре были разноимённые заряды: $+q$ — в вершины одного правильного тетраэдра, вписанного в куб, $-q$ — в вершины другого (рисунок 2). Тогда $n_1 = 12$. Каждая диагональ грани соединяет вершины одного тетраэдра — все 12 пар одноимённые, $n_2 = 0$. Диагональ куба соединяет вершины разных тетраэдров — $n_3 = 4$.



Лучшая расстановка: на каждом ребре разноимённые заряды; $+q$ — в вершинах одного тетраэдра, $-q$ — другого.

Энергия:

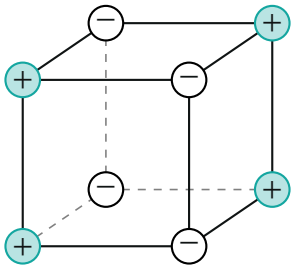
$$W = W_1\left(-12 + \frac{12}{\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{3}}\right) = W_1(-12 + 8{,}485 - 2{,}309) \approx -5{,}82\,\frac{kq^2}{a}.$$

4. Почему это минимум: полный перебор. Способов выбрать 4 вершины под $+q$ из 8 всего $\binom{8}{4} = 70$. Посчитав энергию для каждого (программа на python по формуле шага 2), получаем всего шесть разных значений — расстановки, переходящие друг в друга поворотами и отра-

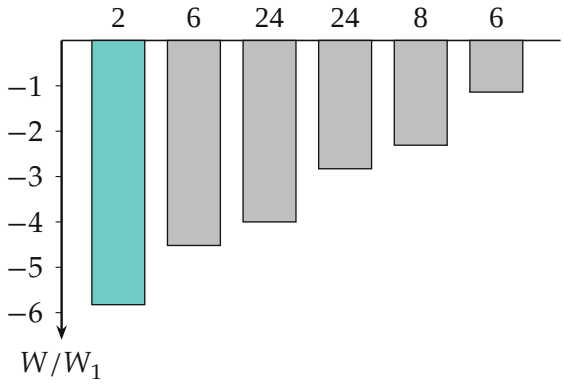
жениями куба:

расстановка	число	W/W_1
тетраэдры (NaCl)	2	−5,824
два противоположных ребра	6	−4,519
«ломаная» из трёх рёбер	24	−4,000
«зигзаг» из трёх рёбер	24	−2,828
вершина и три её соседа	8	−2,309
грань	6	−1,138

Наименьшая энергия — у расстановки шага 3; следующая за ней (рисунок 3) выше на $1{,}3\,W_1$.



Вторая по выгодности расстановка: одноимённые заряды на двух противоположных рёбрах; одноимённых пар на рёбрах уже четыре.



Энергии всех шести типов расстановок (по полному перебору), над столбцами — сколько расстановок каждого типа; бирюзой — минимум.

5. Почему рёбра важнее диагоналей граней. В расстановке шага 3 все диагонали граней одноимённые — это «плата» за разноимённые рёбра: если на ребре AB и ребре BC заряды разноимённые, то на диагонали AC они одноимённые. Плата меньше выигрыша: ребро весит 1, диагональ грани — $1/\sqrt{2} \approx 0{,}71$. Перебор шага 4 подтверждает: любая другая расстановка проигрывает.

Обратите внимание. Минимум энергии системы не совпадает с минимумом энергии каждого заряда: заряду $+q$ «хотелось бы» иметь вокруг четыре $-q$ (три соседа по рёбрам и ещё один по диагонали грани), но тогда другим зарядам придётся стоять рядом с одноимёнными.

Ответ: $+q$ и $-q$ — в вершинах двух вписанных в куб тетраэдров (на каждом ребре разноимённые заряды);

$$W_{\min} = \frac{kq^2}{a}\left(-12 + \frac{12}{\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{3}}\right) \approx -5{,}82\,\frac{kq^2}{a}.$$

Проверка. Размерность kq^2/a — энергия (Дж). Знак минус: система связанная, чтобы растащить заряды на бесконечность, нужно совершить работу. Независимый счёт программой по координатам вершин дал $-5{,}8241\,kq^2/a$.

Ответ. $+q$ и $-q$ чередуются по рёбрам (вершины двух вписанных тетраэдров); $W_{\min} = \dfrac{kq^2}{a}\left(-12 + \dfrac{12}{\sqrt{2}} - \dfrac{4}{\sqrt{3}}\right) \approx -5{,}82\,\dfrac{kq^2}{a}$.