Конденсаторы и ключ

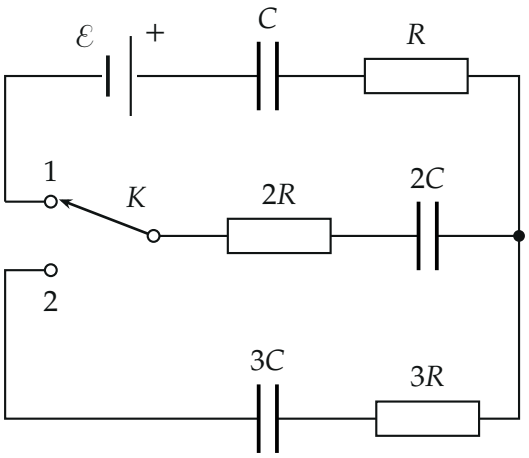
Задача 5. [Курчатов 2017/18, 11 класс, задача 5] В электрической схеме, показанной на рисунке, в начальный момент времени все конденсаторы разряжены. Ключ K сначала переводят в положение 1, затем, подождав достаточное количество времени для полной зарядки конденсаторов, переключают в положение 2. Найдите:

а) количество теплоты Q_1, выделившееся в цепи за то время, пока ключ был в положении 1;

б) количество теплоты Q_2, выделившееся в цепи за то время, пока ключ был в положении 2;

в) заряд, протекший через ключ K в положении 2.

Величины, указанные на рисунке, считать известными.

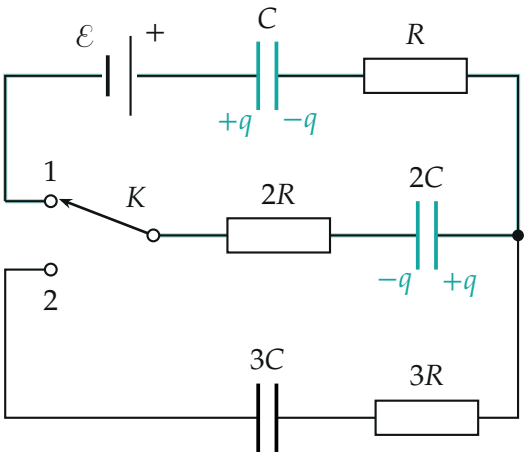


▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на переходные процессы в цепях с конденсаторами: токи текут, пока конденсаторы перезаряжаются, а в конце тока нет, и на резисторах нет напряжения. Поэтому конечные заряды находятся из законов для «застывшей» цепи (сумма напряжений в контуре, сохранение заряда изолированных пластин), а теплота — из закона сохранения энергии: работа источника минус прирост энергии конденсаторов. Значения сопротивлений на ответ не влияют — они задают только, как быстро всё произойдёт.

Обозначения. q — заряды конденсаторов C и $2C$ после первого этапа; q'_2, q'_3 — заряды конденсаторов $2C$ и $3C$ после второго; Δq — заряд, протекший через ключ во втором положении.

Пункт а.

1. Какой контур работает. В положении 1 ключ соединяет левый провод с ветвью $2R$, $2C$; нижняя ветвь ($3C$, $3R$) с одной стороны разомкнута — тока в ней нет. Ток идёт по контуру $\mathcal{E}$ — C — R — узел — $2C$ — $2R$ — K (рисунок 2, бирюзовый). Конденсаторы C и $2C$ в нём соединены последовательно, и через них прошёл один и тот же заряд: $q_1 = q_2 = q$.



Положение 1: заряжается контур источника, C и 2C (бирюзой); знаки зарядов — по полярности источника.

2. Заряд: второе правило Кирхгофа для контура после зарядки (тока нет, напряжения на резисторах равны нулю):

$$\mathcal{E} = \frac{q}{C} + \frac{q}{2C} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{2}{3}C\mathcal{E}.$$

3. Теплота: закон сохранения энергии. Источник перенёс заряд q и совершил работу $\mathcal{E}q$; она пошла на энергию конденсаторов и на теплоту в резисторах:

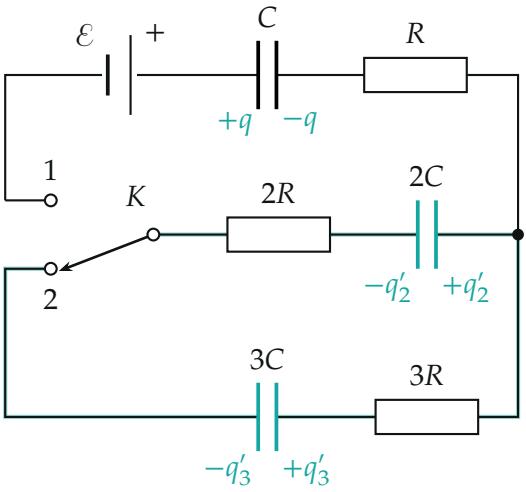
$$\mathcal{E}q = \frac{q^2}{2C} + \frac{q^2}{2 \cdot 2C} + Q_1,$$

$$Q_1 = \frac{2}{3}C\mathcal{E}^2 - \frac{3}{4}\cdot\frac{q^2}{C} = \frac{2}{3}C\mathcal{E}^2 - \frac{1}{3}C\mathcal{E}^2 = \frac{1}{3}C\mathcal{E}^2.$$

Ровно половина работы источника ушла в тепло — так всегда при зарядке от источника постоянной ЭДС.

Пункт б.

4. Какой контур работает. В положении 2 верхняя ветвь с источником разомкнута, C остаётся заряженным и больше не участвует. Замкнулся контур $2C$ — $2R$ — K — $3C$ — $3R$ — узел (рисунок 3): заряженный конденсатор $2C$ разряжается через незаряженный $3C$. Последовательными они не являются — у $2C$ уже был заряд.



Положение 2: заряд конденсатора $2C$ перетекает на $3C$ по бирюзовому контуру; левые пластины $2C$ и $3C$ вместе образуют изолированный проводник.

5. Закон сохранения заряда. Левая пластина $2C$, провод через ключ и левая пластина $3C$ ни с чем больше не соединены. До переключения на них был заряд $-q$, после — $-q_2' - q_3'$:

$$q_2' + q_3' = q.$$

6. Конечное состояние: второе правило Кирхгофа (ток прекратил-

ся, напряжения на $2C$ и $3C$ равны):

$$\frac{q_2'}{2C} = \frac{q_3'}{3C} \quad \Rightarrow \quad q_2' = \frac{2}{5}q = \frac{4}{15}C\mathcal{E}, \qquad q_3' = \frac{3}{5}q = \frac{2}{5}C\mathcal{E}.$$

7. Теплота: закон сохранения энергии (источник в контур не входит, работы не совершает):

$$Q_2 = \frac{q^2}{2\cdot 2C} - \frac{q_2'^2}{2\cdot 2C} - \frac{q_3'^2}{2\cdot 3C},$$

$$Q_2 = \frac{q^2}{4C}\left(1 - \frac{4}{25}\right) - \frac{9q^2}{150C} = \frac{q^2}{C}\left(\frac{21}{100} - \frac{6}{100}\right) = \frac{3}{20}\cdot\frac{q^2}{C}.$$

С $q = \frac{2}{3}C\mathcal{E}$:

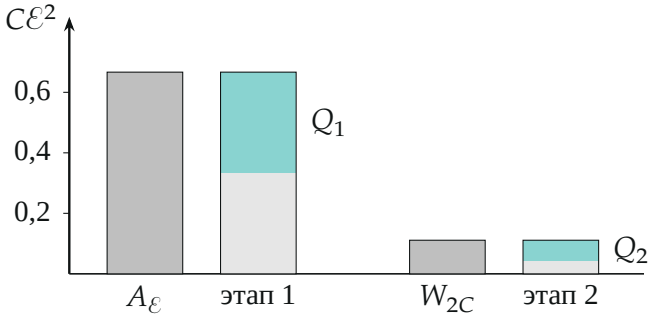
$$Q_2 = \frac{3}{20}\cdot\frac{4}{9}C\mathcal{E}^2 = \frac{1}{15}C\mathcal{E}^2.$$

Второй способ: это «неупругое соединение» конденсаторов, потеря энергии $\frac{q^2}{2}\cdot\frac{1}{C_2+C_3}\cdot\frac{C_3}{C_2} = \frac{q^2}{2}\cdot\frac{1}{5C}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3q^2}{20C}$ — то же.

Пункт в.

8. Заряд через ключ. Весь заряд, попавший на левую пластину $3C$, прошёл через ключ (другого пути к ней нет):

$$\Delta q = q_3' = \frac{2}{5}C\mathcal{E}.$$



Баланс энергии в единицах $C\mathcal{E}^2$ (по вычисленным значениям): слева — что было (работа источника; энергия $2C$ перед переключением), справа — куда ушло: светлое — энергия конденсаторов, бирюзовое — теплота.

Обратите внимание. Во втором положении конденсатор C заряжен, но в контур не входит — его энергия $\frac{q^2}{2C} = \frac{2}{9}C\mathcal{E}^2$ так и остаётся на нём и в баланс Q_2 не попадает.

Ответ: а) $Q_1 = \frac{1}{3}C\mathcal{E}^2$; б) $Q_2 = \frac{1}{15}C\mathcal{E}^2$; в) $\Delta q = \frac{2}{5}C\mathcal{E}$.

Проверка. Размерность: $C\mathcal{E}^2$ — Ф·В^2 = Дж, $C\mathcal{E}$ — Кл. Предел $3C \to \infty$ во втором этапе (вместо $3C$ — провод): весь заряд стёк бы, и в тепло ушла бы вся энергия $2C$, $\frac{q^2}{4C} = \frac{1}{9}C\mathcal{E}^2$; наша формула $\frac{q^2}{2}\frac{C_3}{C_2(C_2+C_3)} \to \frac{q^2}{2C_2}$ — совпадает. Численно (в единицах $C\mathcal{E}^2$): $\frac{1}{9} - 0{,}0178 - 0{,}0267 = 0{,}0667 = \frac{1}{15}$.

Ответ. а) $Q_1 = \frac{1}{3}C\mathcal{E}^2$; б) $Q_2 = \frac{1}{15}C\mathcal{E}^2$; в) $\Delta q = \frac{2}{5}C\mathcal{E}$.