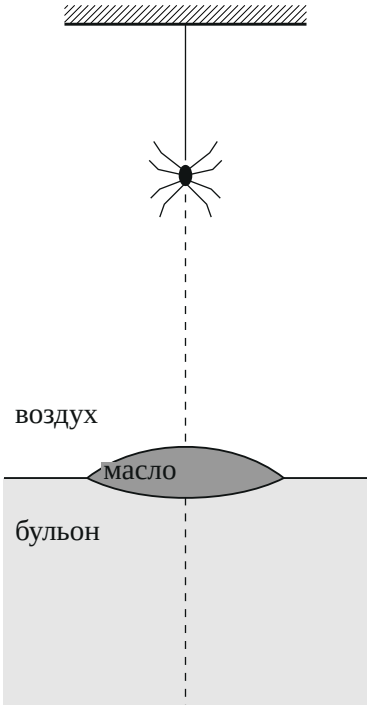
Паучок и капля масла

Задача 6. [Курчатов 2017/18, 11 класс, задача 6] На ровном горизонтальном столе находится тарелка с бульоном, на поверхности которого плавают масляные капли. Над тарелкой находится паучок Аркаша, который спускается по паутине с постоянной скоростью v. В некоторый момент времени, оказавшись на высоте h над одной из капель, с радиусами кривизны R_1 (поверхность воздух-масло) и R_2 (поверхность бульон-масло), Аркаша увидел своё изображение на дне тарелки. Определите фокусные расстояния линзы, образуемой масляной каплей на поверхности бульона (см. рисунок), и скорость изображения Аркаши в системе отсчёта паучка в этот момент. Показатели преломления масла, бульона и воздуха известны и находятся в соотношении $n_{\text{масла}} > n_{\text{бульона}} > n_{\text{воздуха}} \simeq 1$.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на тонкую линзу, по разные стороны которой разные среды. Капля — двояковыпуклая масляная лин-

за: сверху воздух, снизу бульон. Оптические силы двух преломляющих поверхностей складываются, а фокусные расстояния сверху и снизу получаются разными — они относятся как показатели преломления сред. Аркаша видит себя на дне: лучи от него, пройдя каплю, собираются на дне в действительное изображение, рассеиваются дном и возвращаются к нему. Изображение движется, потому что паучок приближается к линзе; скорость изображения находим, продифференцировав формулу линзы по времени.

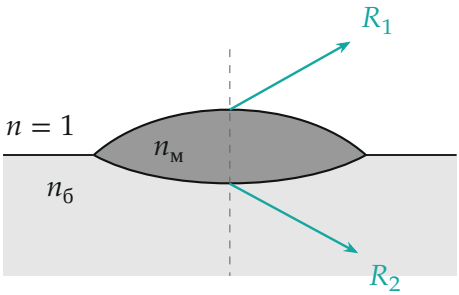
Обозначения. $n_м = n_{масла}$, $n_б = n_{бульона}$; Φ — оптическая сила капли; f_1, f_2 — фокусные расстояния со стороны воздуха и бульона; a — расстояние от паучка до капли (в этот момент $a = h$), b — от капли до изображения; $\Gamma = b/a$; ось направлена вниз.

1. Оптическая сила: сумма сил двух сферических поверхностей. Поверхность радиуса R между средами n_1 (откуда идёт свет) и n_2 имеет оптическую силу $(n_2 - n_1)/R$, если она выпукла навстречу свету. Верхняя поверхность (воздух → масло) выпукла вверх, нижняя (масло → бульон) выпукла вниз — для света, идущего изнутри масла, это вогнутость, поэтому знак меняется:

$$\Phi_1 = \frac{n_м - 1}{R_1}, \qquad \Phi_2 = \frac{n_б - n_м}{-R_2} = \frac{n_м - n_б}{R_2},$$

$$\Phi = \frac{n_м - 1}{R_1} + \frac{n_м - n_б}{R_2}.$$

Обе силы положительны ($n_м > n_б > 1$) — капля собирающая.



Капля — линза из двух поверхностей: верхняя радиуса R_1 граничит с воздухом, нижняя радиуса R_2 — с бульоном.

2. Фокусные расстояния. Для линзы между средами с показателями n (сверху) и $n_б$ (снизу) $\Phi = \dfrac{1}{f_1} = \dfrac{n_б}{f_2}$ (параллельный пучок сверху сходится в бульоне на расстоянии f_2, пучок снизу — в воздухе на f_1). Отсюда

$$f_1 = \frac{1}{\Phi} = \frac{R_1 R_2}{(n_м - 1)R_2 + (n_м - n_б)R_1},$$

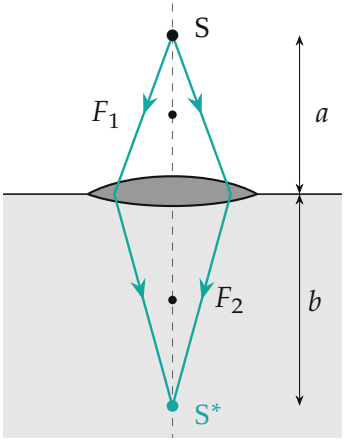
$$f_2 = \frac{n_б}{\Phi} = \frac{n_б R_1 R_2}{(n_м - 1)R_2 + (n_м - n_б)R_1}.$$

$f_2 > f_1$: в бульоне лучи преломляются слабее, чем вышли бы в воздух.

3. Где изображение: формула тонкой линзы для разных сред.

$$\frac{1}{a} + \frac{n_б}{b} = \Phi \quad \Rightarrow \quad b = \frac{n_б}{\Phi - 1/a} = \frac{n_б f_1 a}{a - f_1}.$$

Изображение действительное ($b > 0$), только если $a > f_1$: раз Аркаша видит себя на дне, то $h > f_1$. На рисунке 3 — ход лучей, посчитанный для $n_м = 1{,}5$, $n_б = 1{,}33$, $R_1 = R_2$: $f_1 = 1{,}5R_1$, $f_2 = 2{,}0R_1$, при $h = 3R_1$ изображение на глубине $b = 4R_1$.



Ход лучей (вычислен для $n_м = 1{,}5$, $n_б = 1{,}33$, $R_1 = R_2$, $a = 3R_1$): лучи от паучка S собираются в S^* на дне; фокусы F_1 и F_2 на разных расстояниях.

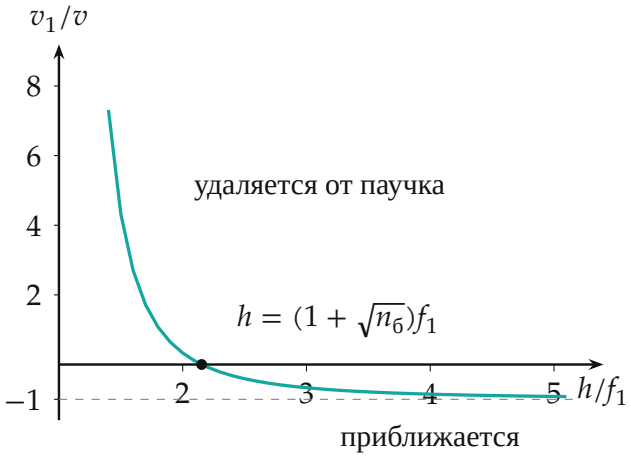
4. Скорость изображения относительно капли: производная формулы линзы по времени. Капля неподвижна, Ф постоянна; паучок приближается: $\dot{a} = -v$. Дифференцируем формулу шага 3:

$$-\frac{\dot{a}}{a^2} - \frac{n_б \dot{b}}{b^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{b} = -\frac{b^2}{n_б a^2}\dot{a} = \frac{v\Gamma^2}{n_б}, \qquad \Gamma = \frac{b}{a}.$$

$\dot{b} > 0$: изображение уходит от капли вниз. Через данные задачи ($a = h$, b из шага 3): $\Gamma = \dfrac{n_б f_1}{h - f_1}$, $\dot{b} = v\,\dfrac{n_б f_1^2}{(h-f_1)^2}$.

5. Переход в систему отсчёта паучка: закон сложения скоростей. Паучок движется вниз со скоростью v, изображение — вниз со скоростью $\dot{b}$. Скорость изображения относительно паучка (вниз — положительно):

$$v_1 = \dot{b} - v = \frac{v\Gamma^2}{n_б} - v = v\left[\frac{n_б f_1^2}{(h-f_1)^2} - 1\right].$$



Скорость изображения относительно паучка от его высоты (по формуле шага 5, $n_б = 1{,}33$): высоко над каплей изображение приближается к паучку, ниже $h = (1+\sqrt{n_б})f_1$ — убегает от него.

Обратите внимание. В формуле линзы при разных средах $1/a$ и $n_б/b$

входят с разными коэффициентами; поэтому скорость изображения — $v\Gamma^2/n_б$, а не привычное $v\Gamma^2$ (продольное увеличение линзы в воздухе).

Ответ: $f_1 = \dfrac{R_1R_2}{(n_м-1)R_2+(n_м-n_б)R_1}$ (со стороны воздуха), $f_2 = n_б f_1$ (со стороны бульона); скорость изображения относительно паучка (вниз — положительно)

$$v_1 = \frac{v\Gamma^2}{n_б} - v = v\left[\frac{n_б f_1^2}{(h-f_1)^2} - 1\right], \qquad \Gamma = \frac{b}{a} = \frac{n_б f_1}{h-f_1}.$$

Проверка. Размерности: f — $м^2/м = м$, v_1 — скорость. Предел $n_б = 1$ (капля в воздухе): $f_1 = f_2$, $\Phi = (n_м-1)(1/R_1+1/R_2)$ — формула тонкой линзы, и $\dot b = v\Gamma^2$ — известное продольное увеличение. Предел $h \to f_1$: $b \to \infty$, изображение убегает бесконечно быстро; $h \to \infty$: изображение почти в фокусе F_2 и неподвижно, относительно паучка оно приближается со скоростью v ($v_1 \to -v$).

Ответ. $f_1 = \dfrac{R_1R_2}{(n_м-1)R_2+(n_м-n_б)R_1}$, $f_2 = n_б f_1$; $v_1 = \dfrac{v\Gamma^2}{n_б} - v = v\left[\dfrac{n_б f_1^2}{(h-f_1)^2} - 1\right]$ (вниз — положительно), $\Gamma = \dfrac{n_б f_1}{h-f_1}$.