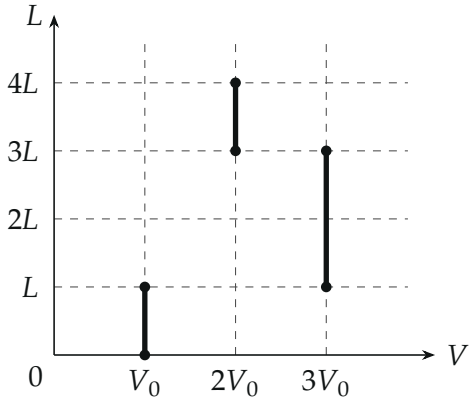
Средняя скорость по графику

Задача 1. [Курчатов 2017/18, 7 класс, задача 1] На графике представлена зависимость пройденного телом пути от его скорости. Определите среднюю скорость движения тела на всём пути.

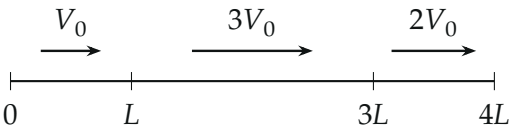


▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на среднюю скорость при неравномерном движении. На графике «путь от скорости» каждый вертикальный отрезок — участок, где скорость постоянна, а путь растёт: тело проходит этот участок равномерно. Средняя скорость — весь путь, делённый на всё время, а не среднее арифметическое скоростей: на медленных участках тело проводит больше времени, и они весят больше.

Обозначения. s_1, s_2, s_3 — длины участков в порядке прохождения, v_1, v_2, v_3 — скорости на них, t_1, t_2, t_3 — время на каждом; $v_{\text{ср}}$ — средняя скорость.

1. Читаем график: три участка равномерного движения. Путь растёт снизу вверх (рисунок 2):

участок	путь	скорость
$0 \to L$	$s_1 = L$	$v_1 = V_0$
$L \to 3L$	$s_2 = 2L$	$v_2 = 3V_0$
$3L \to 4L$	$s_3 = L$	$v_3 = 2V_0$



Путь тела по участкам: скорость V_0 на первом отрезке L, $3V_0$ на следующих $2L$, $2V_0$ на последнем L (длина стрелки — модуль скорости).

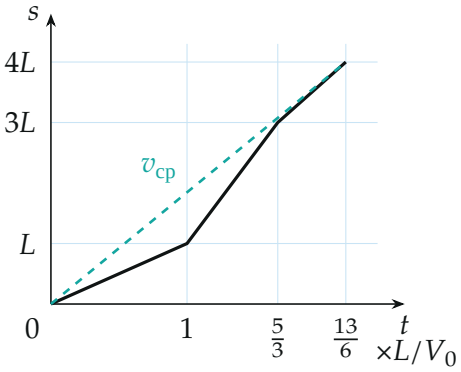
2. Время на каждом участке: равномерное движение. На участке с постоянной скоростью $t = s/v$:

$$t_1 = \frac{L}{V_0}, \qquad t_2 = \frac{2L}{3V_0}, \qquad t_3 = \frac{L}{2V_0};$$

$$t_1 + t_2 + t_3 = \frac{L}{V_0}\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{13}{6}\,\frac{L}{V_0}.$$

3. Средняя скорость: весь путь на всё время.

$$v_{\text{ср}} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{4L}{\frac{13}{6}\frac{L}{V_0}} = \frac{24}{13}\,V_0 \approx 1{,}85\,V_0.$$

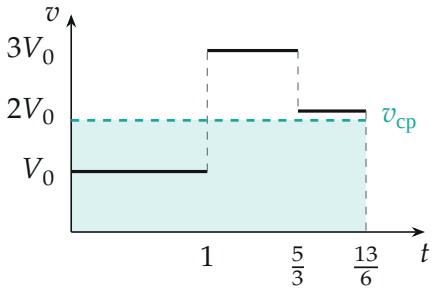


Путь от времени (время в единицах L/V_0): ломаная из трёх отрезков с наклонами V_0, $3V_0$, $2V_0$; наклон пунктира от начала до конца — средняя скорость $\frac{24}{13}V_0$.

Обратите внимание. Среднее арифметическое скоростей участков $\frac{V_0+3V_0+2V_0}{3} = 2V_0$ — неверный ответ: участки разной длины и проходятся за разное время.

Ответ: $v_{\text{ср}} = \dfrac{4L}{L/V_0 + 2L/(3V_0) + L/(2V_0)} = \dfrac{24}{13}\,V_0 \approx 1{,}85\,V_0$.

Проверка. Второй способ — через график скорости от времени (рисунок 4): путь равен площади под графиком, $V_0\cdot 1 + 3V_0\cdot\frac{2}{3} + 2V_0\cdot\frac{1}{2} = 4V_0$ (в единицах L/V_0 по времени) — это $4L$, как и должно быть; средняя скорость — высота прямоугольника той же площади на всём времени $\frac{13}{6}$: $4V_0 : \frac{13}{6} = \frac{24}{13}V_0$. Средняя скорость лежит между наименьшей V_0 и наибольшей $3V_0$ — разумно.



Скорость от времени: площадь под ступенчатым графиком равна площади бирюзового прямоугольника высотой $v_{ср} = \frac{24}{13}V_0$.

Ответ. $v_{\text{ср}} = \dfrac{24}{13}\,V_0 \approx 1{,}85\,V_0$.