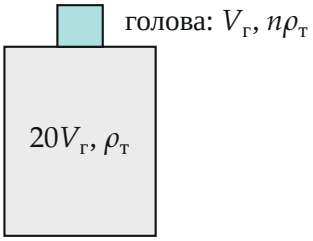
Роботы Васи и Пети

Задача 2. [Курчатов 2017/18, 7 класс, задача 2] Отличник Вася и троечник Петя собирали модели роботов. Петя собрал свою модель таким образом, что объём тела (без головы) в двадцать раз больше объёма головы, а плотность головы в пять раз больше плотности оставшейся части тела. Вася собрал свою модель так, что объём тела (без головы) в двадцать раз больше объёма головы, но плотность головы в пятьдесят раз больше плотности оставшейся части тела. Во сколько раз плотность Васиного робота больше плотности робота Пети?

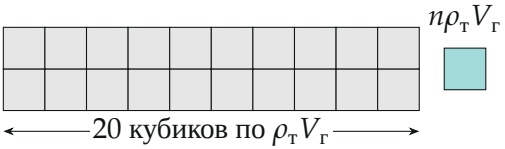


Поясняющий рисунок: робот — тело объёмом $20V_г$ с плотностью ρ_m и голова объёмом $V_г$ с плотностью в n раз больше ($n = 5$ у Пети, $n = 50$ у Васи).

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на среднюю плотность составного тела. Плотность робота — его полная масса, делённая на полный объём; это не среднее арифметическое плотностей частей. Объёмы у роботов одинаковые по устройству, отличается только плотность головы, поэтому удобно выразить всё через объём головы $V_г$ и плотность тела $\rho_т$ — они при делении сократятся.

Обозначения. $V_г$ — объём головы, $V_т = 20V_г$ — объём тела без головы; $\rho_т$ — плотность тела; n — во сколько раз голова плотнее тела; $\rho_п$, $\rho_в$ — средние плотности роботов Пети и Васи. Считаем, что плотность тела у обоих роботов одна и та же (иначе ответ не определён).

Разрежем робота мысленно на 21 одинаковый кубик объёмом $V_г$ (рисунок 2): 20 кубиков тела массой $\rho_т V_г$ каждый и один кубик-голова массой $n\rho_т V_г$.



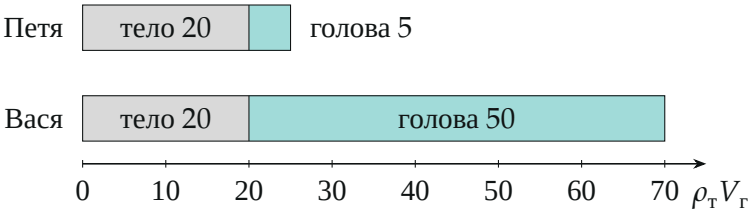
Робот, разрезанный на 21 кубик объёмом $V_г$: двадцать кубиков тела (серые) и голова (бирюзовая) с массой в n раз больше.

1. Средняя плотность робота в общем виде. Масса — сумма масс тела и головы, $m = \rho V$ для каждой части:

$$\rho = \frac{m_т + m_г}{V_т + V_г} = \frac{\rho_т \cdot 20V_г + n\rho_т V_г}{20V_г + V_г} = \frac{20 + n}{21}\rho_т.$$

2. Робот Пети ($n = 5$) и робот Васи ($n = 50$).

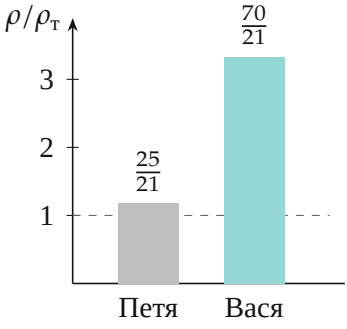
$$\rho_п = \frac{25}{21}\rho_т, \qquad \rho_в = \frac{70}{21}\rho_т.$$



Массы частей в единицах $\rho_m V_г$: у Пети $20 + 5 = 25$, у Васи $20 + 50 = 70$; объём у обоих $21V_г$.

3. Отношение плотностей. Объёмы роботов одинаковы ($21V_г$), поэтому отношение плотностей равно отношению масс:

$$\frac{\rho_в}{\rho_п} = \frac{20 + 50}{20 + 5} = \frac{70}{25} = 2{,}8.$$



Средние плотности роботов в единицах ρ_m: $\frac{25}{21} \approx 1{,}19$ и $\frac{70}{21} \approx 3{,}33$; пунктир — плотность тела без головы.

Обратите внимание. Плотность головы у Васи больше в 10 раз, а плотность всего робота — только в 2,8 раза: голова мала по объёму, и на среднюю плотность она влияет через свою долю массы.

Ответ: $\dfrac{\rho_в}{\rho_п} = \dfrac{20+50}{20+5} = 2{,}8$.

Проверка. Предел: если бы голова была такой же плотности, как тело ($n = 1$), получилось бы $\rho = \rho_т$ — верно. Каждая средняя плотность лежит между плотностью тела и плотностью головы: $\rho_т < \frac{25}{21}\rho_т < 5\rho_т$ и $\rho_т < \frac{70}{21}\rho_т < 50\rho_т$ — разумно.

Ответ. В 2,8 раза.