# Эспандер

**Задача 3.** [Курчатов 2017/18, 7 класс, задача 3] Богатырь Илья собрал специальный эспандер для тренировок, жёсткости пружин указаны на рисунке. Во сколько раз жёсткость такого эспандера больше жёсткости эспандера, в котором все пружины соединены последовательно? Как необходимо соединить пружины, чтобы жесткость была максимальной? Считать, что $k_1 = 100$ Н/м, $k_2 = 200$ Н/м, $k_3 = 300$ Н/м.

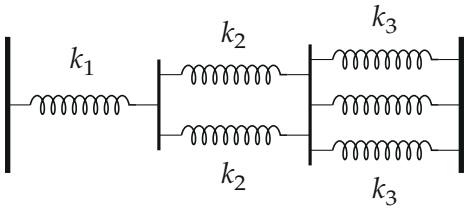



*Схема эспандера (в опубликованных материалах олимпиады рисунка к задаче нет; схема восстановлена по решению организаторов): пружина $k_1$, за ней две параллельные пружины $k_2$, за ними три параллельные пружины $k_3$, между ручками — жёсткие планки.*

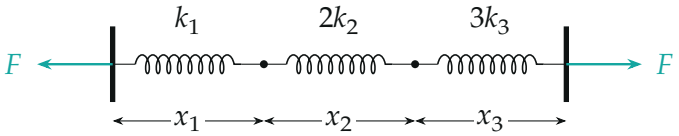
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на соединения пружин. При растяжении эспандера сила $F$ передаётся вдоль цепочки, а удлинения складываются — так работает последовательное соединение. Внутри группы параллельных пружин удлинение одно, а силы складываются. Две формулы — для параллельного и последовательного соединения — сводят эспандер к одной пружине.

**Обозначения.** $F$ — сила, с которой растягивают эспандер; $x$ — его удлинение; $k_{\text{эсп}}$ — жёсткость эспандера; $k_{\text{посл}}$ — жёсткость, если все шесть пружин соединить в одну цепочку; $k_{\text{пар}}$ — если все шесть поставить рядом.

**1. Параллельные пружины: закон Гука для каждой.** Планки жёсткие, поэтому все пружины группы растянуты на одно и то же $x$; силы складываются:

$$F = k_2 x + k_2 x = 2k_2\, x \quad \Rightarrow \quad k_2' = 2k_2 = 400 \text{ Н/м};$$

$$k_3' = 3k_3 = 900 \text{ Н/м}.$$




*Эквивалентная схема: три пружины жёсткостями $k_1$, $2k_2$, $3k_3$ последовательно; через каждую передаётся одна и та же сила $F$, удлинения складываются.*

**2. Эспандер: последовательное соединение трёх «пружин».** По каждой из трёх частей передаётся одна и та же сила $F$ (иначе на невесомую планку действовала бы ненулевая сила), а удлинения складываются:

$$x = x_1 + x_2 + x_3 = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{2k_2} + \frac{F}{3k_3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k_{\text{эсп}}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{2k_2} + \frac{1}{3k_3}.$$

Числа:

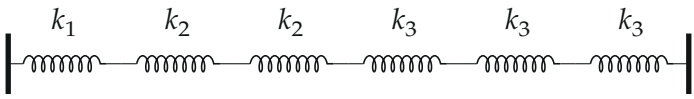
$$\frac{1}{k_{\text{эсп}}} = \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{400} + \frac{1}{900}\right) \frac{\text{м}}{\text{Н}} = \frac{36+9+4}{3600} \frac{\text{м}}{\text{Н}} = \frac{49}{3600} \frac{\text{м}}{\text{Н}},$$

$$k_{\text{эсп}} = \frac{3600}{49} \frac{\text{Н}}{\text{м}} \approx 73{,}5 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

**3. Все пружины последовательно.** Цепочка из одной $k_1$, двух $k_2$ и трёх $k_3$:

$$\frac{1}{k_{\text{посл}}} = \frac{1}{k_1} + \frac{2}{k_2} + \frac{3}{k_3} = \left(\frac{1}{100} + \frac{2}{200} + \frac{3}{300}\right) \frac{\text{м}}{\text{Н}} = \frac{3}{100} \frac{\text{м}}{\text{Н}},$$

$$k_{\text{посл}} = \frac{100}{3} \frac{\text{Н}}{\text{м}} \approx 33{,}3 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$



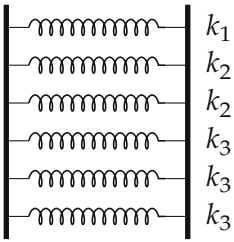
*Все шесть пружин соединены последовательно.*

**4. Во сколько раз эспандер жёстче.**

$$\frac{k_{\text{эсп}}}{k_{\text{посл}}} = \frac{3600/49}{100/3} = \frac{108}{49} \approx 2{,}2.$$

**5. Максимальная жёсткость.** Добавление пружины последовательно увеличивает $1/k$, то есть уменьшает жёсткость; добавление параллельно прибавляет её жёсткость. Поэтому жёсткость наибольшая, когда все пружины стоят параллельно между ручками (рисунок 5):

$$k_{\text{пар}} = k_1 + 2k_2 + 3k_3 = (100 + 400 + 900)\ \text{Н/м} = 1400\ \text{Н/м}.$$




*Все шесть пружин параллельно: жёсткости складываются,* $k_{пар} = 1400$ *Н/м.*

**Обратите внимание.** У последовательного соединения складываются *обратные* жёсткости, поэтому его жёсткость меньше жёсткости самой мягкой пружины; у параллельного складываются сами жёсткости.

**Ответ:** $\dfrac{k_{\text{эсп}}}{k_{\text{посл}}} = \dfrac{1/k_1 + 2/k_2 + 3/k_3}{1/k_1 + 1/(2k_2) + 1/(3k_3)} = \dfrac{108}{49} \approx 2{,}2$; максимальная жёсткость — при параллельном соединении всех пружин, $k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 1400$ Н/м.

**Проверка.** Растянем эспандер силой $F = 10$ Н: удлинения $x_1 = 10$ см, $x_2 = 2{,}5$ см, $x_3 \approx 1{,}1$ см, всего 13,6 см, $k = F/x \approx 73{,}5$ Н/м — совпадает. В цепочке из шести пружин каждая растянута на 10 см, всего 30 см, $k = 33{,}3$ Н/м. Размерность: отношение жёсткостей безразмерно.

**Ответ.** В $\dfrac{108}{49} \approx 2{,}2$ раза; жёсткость максимальна, если все пружины соединить параллельно: 1400 Н/м.