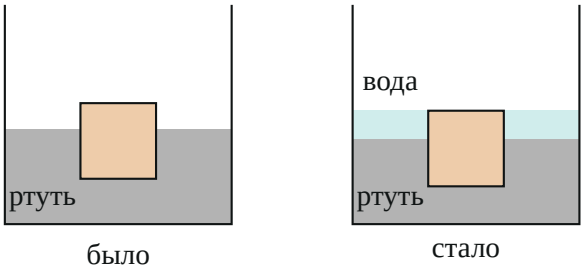
Медный кубик в ртути и воде

Задача 4. [Курчатов 2017/18, 7 класс, задача 4] Медный кубик с длиной ребра 20 см плавает в сосуде с ртутью. Затем в этот сосуд наливают воду вровень с верхней гранью кубика. Найдите высоту установившегося слоя воды. Плотность меди $\rho_м = 8900$ кг/м^3, плотность ртути $\rho_{рт} = 13600$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3.

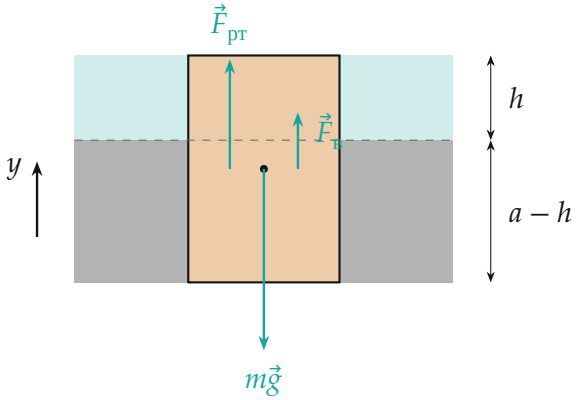


Поясняющий рисунок (в масштабе по найденному ответу): медный кубик плавает в ртути; после доливания воды вровень с верхней гранью он погружён в ртуть меньше — вода выталкивает его вверх.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на плавание тел и закон Архимеда в двух жидкостях. Кубик плавает — значит, сила тяжести уравновешена выталкивающими силами. Вода сверху тоже давит на жидкость вокруг и создаёт свою выталкивающую силу: на часть кубика в воде действует архимедова сила воды, на часть в ртути — ртути. Вода лёгкая, поэтому кубик лишь немного всплывает, а слой воды получается меньше ребра.

Обозначения. $a = 20$ см — ребро, $S = a^2$ — площадь грани; h — высота слоя воды (она же глубина кубика в воде: вода вровень с верхней гранью); $a - h$ — глубина кубика в ртути; ось y — вертикально вверх.

1. Силы на кубик. Сила тяжести $mg = \rho_м g a S$ вниз, архимедова сила воды $\rho_в g S h$ и архимедова сила ртути $\rho_{рт} g S (a - h)$ вверх (рисунок 2). Каждая архимедова сила равна весу жидкости в объёме погружённой в неё части кубика.



Силы на кубик: сила тяжести $m\vec{g}$ вниз, архимедовы силы ртути $\vec{F}_{рт}$ и воды $\vec{F}_{в}$ вверх (длины стрелок примерно по модулю).

2. Условие равновесия кубика: второй закон Ньютона в проекции на ось y.

$$\rho_{рт} g S(a-h) + \rho_{в} g S h - \rho_{м} g S a = 0.$$

Сократим gS и соберём слагаемые с h:

$$(\rho_{рт} - \rho_{в})\, h = (\rho_{рт} - \rho_{м})\, a \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\rho_{рт} - \rho_{м}}{\rho_{рт} - \rho_{в}}\, a.$$

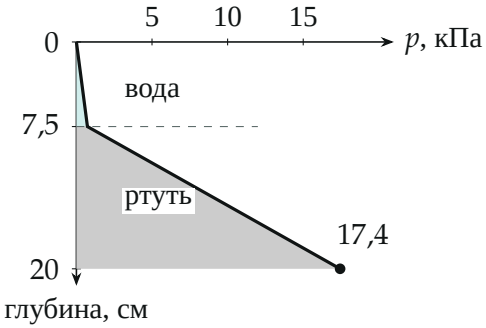
3. Числа.

$$h = \frac{13600 - 8900}{13600 - 1000} \cdot 20\text{ см} = \frac{4700}{12600} \cdot 20\text{ см} \approx 7{,}5\text{ см}.$$

Проверка вторым способом: давление на нижнюю грань. Боковые силы давления уравновешены, на верхнюю грань давит только атмосфера (её не учитываем — она давит и снизу через жидкость). Давление жидкостей на нижнюю грань — столб воды h плюс столб ртути $a-h$, и оно держит кубик (рисунок 3):

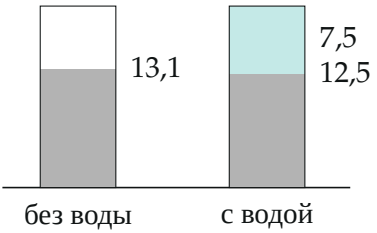
$$p\,S = (\rho_{в} g h + \rho_{рт} g (a-h))S = \rho_{м} g a S,$$

то же уравнение. Подставим числа: $p = 1000 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}0746 + 13600 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}1254 \approx 17{,}4$ кПа, а $\rho_{м} g a \approx 17{,}4$ кПа — совпало.



Давление жидкостей от глубины вдоль боковой стороны кубика: в слое воды растёт медленно (0,73 кПа на 7,5 см), в ртути — быстро; на глубине нижней грани 17,4 кПа = $\rho_м g a$.

Обратите внимание. Вода над ртутью тоже выталкивает кубик: забыть архимедову силу воды — значит получить, что кубик не всплывает, а это неверно. Без воды кубик погружён в ртуть на $\dfrac{\rho_м}{\rho_{рт}} a \approx 13{,}1$ см, с водой — на $a - h \approx 12{,}5$ см: он всплыл на 0,6 см (рисунок 4).



Ребро кубика 20 см: серым — часть в ртути, бирюзовым — часть в воде (числа в сантиметрах).

Ответ: $h = \dfrac{\rho_{рт} - \rho_м}{\rho_{рт} - \rho_в} a \approx 7{,}5$ см.

Проверка пределов. Если бы вода весила как ртуть ($\rho_в \to \rho_{рт}$), кубик всплывал бы полностью и $h \to \infty$ (формула теряет смысл — верно); при $\rho_м = \rho_{рт}$ кубик и так погружён целиком и $h = 0$. Размерность: отношение плотностей безразмерно, h — в единицах a.

Ответ. $h \approx 7{,}5$ см.