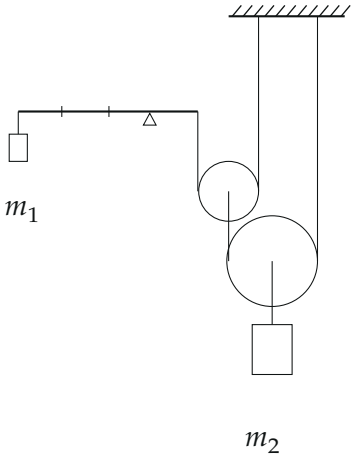
Система блоков и рычаг

Задача 2. [Курчатов 2017/18, 8 класс, задача 2] На рисунке приведена конструкция, состоящая из простых механизмов. Определите, чему должна быть равна масса груза m_2, для того чтобы система находилась в равновесии, если масса груза $m_1 = 1$ кг?



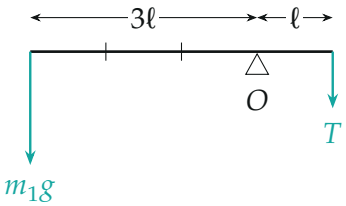
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие простых механизмов: рычаг и два подвижных блока. Идём по цепочке от известного груза: правило моментов для рычага даёт натяжение верёвки на его правом конце, затем условие равновесия каждого подвижного блока удваивает силу. Блоки и верёвки считаем невесомыми, трения нет — тогда натяжение одной верёвки одинаково по всей её длине.

Обозначения. ℓ — длина одного деления рычага (расстояние между засечками); T — натяжение верёвки, идущей от правого конца рычага через малый блок к потолку; T' — натяжение верёвки, идущей от оси малого блока через большой блок к потолку; g — ускорение свободного падения.

1. Рычаг: правило моментов. Отсчитаем деления от опоры: груз m_1 висит на расстоянии 3ℓ слева, верёвка тянет правый конец вниз на расстоянии ℓ (рисунок 2). Рычаг невесом и неподвижен, поэтому моменты

сил относительно опоры уравновешены:

$$m_1 g \cdot 3\ell = T \cdot \ell \quad \Rightarrow \quad T = 3m_1 g.$$



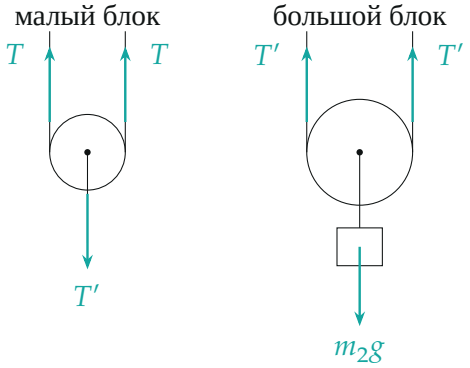
Силы, поворачивающие рычаг вокруг опоры O: вес груза $m_1 g$ на плече 3ℓ и натяжение T на плече ℓ (сила реакции опоры приложена в O и момента не даёт).

2. Малый блок: второй закон Ньютона в проекции на вертикаль. Малый блок подвижный: обе ветви верёвки с натяжением T идут от него вверх (одна к рычагу, другая к потолку), а вниз его тянет верёвка, привязанная к оси, с натяжением T' (рисунок 3). Блок в покое:

$$2T - T' = 0 \quad \Rightarrow \quad T' = 2T = 6m_1 g.$$

3. Большой блок с грузом. Большой блок тоже подвижный: верёвка T' огибает его снизу, обе её ветви — левая к оси малого блока и правая к потолку — тянут вверх. Вниз действует вес груза $m_2 g$ (блок невесом):

$$2T' - m_2 g = 0 \quad \Rightarrow \quad m_2 g = 2T' = 4T = 12m_1 g.$$



Силы на подвижные блоки: малый держат две ветви с натяжением T и тянет вниз верёвка T'; большой с грузом держат две ветви с натяжением T'.

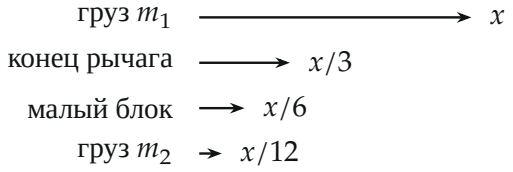
4. Масса груза.

$$m_2 = 12m_1 = 12 \text{ кг}.$$

Обратите внимание. Каждый подвижный блок даёт выигрыш в силе в два раза, два блока подряд — в четыре; рычаг с плечами 3ℓ и ℓ даёт ещё выигрыш в три раза. Общий выигрыш $4 \cdot 3 = 12$.

Ответ: $m_2 = 4 \cdot 3\, m_1 = 12$ кг.

Проверка: «золотое правило механики». Опустим груз m_1 на малую высоту x. Правый конец рычага поднимется на $x/3$, верёвка T укоротится на $x/3$ — малый блок поднимется на $x/6$, большой — на $x/12$. Работа силы тяжести груза m_1 равна работе против силы тяжести m_2: $m_1 g\, x = m_2 g\, x/12$, $m_2 = 12m_1$ — совпало (рисунок 4).



Перемещения при малом сдвиге системы: груз m_1 опускается на x, груз m_2 поднимается в 12 раз меньше (длины стрелок в масштабе).

Ответ. $m_2 = 12$ кг.