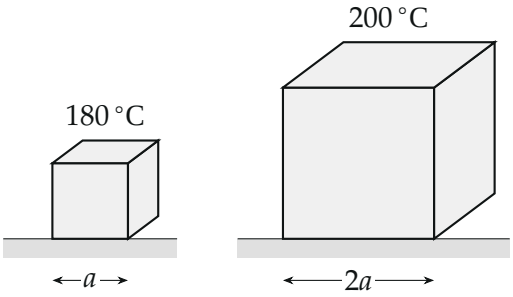
Остывание двух кубов

Задача 4. [Курчатов 2017/18, 8 класс, задача 4] Алюминиевый куб с длиной ребра a нагрели до температуры $t_1 = 180\,^\circ\text{C}$ и положили на стол, не проводящий тепло, в большой комнате. Одновременно с этим, рядом на соседний такой же стол, положили алюминиевый куб с длиной ребра $2a$, который был нагрет до $200\,^\circ\text{C}$. Через какое-то время маленький куб остыл до температуры $120\,^\circ\text{C}$. Какая температура будет в этот момент времени у большого кубика?



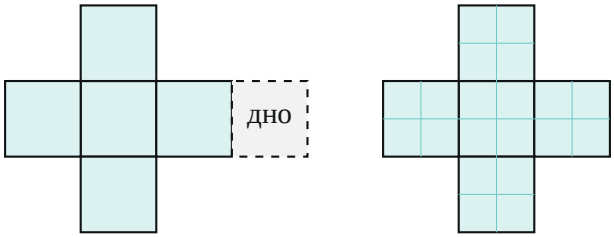
Поясняющий рисунок: два алюминиевых куба на нетеплопроводных столах в одной комнате.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на теплообмен с окружающим воздухом (закон охлаждения Ньютона). Тепло уходит только через открытые грани (стол тепло не проводит), и мощность теплоотдачи пропорциональна площади открытых граней и разности температур куба и комнаты. Тепло берётся из внутренней энергии куба, которая пропорциональна его объёму. У большого куба площадь больше в 4 раза, а запас тепла — в 8 раз, поэтому он остывает вдвое медленнее: всё, что маленький куб проходит за время t, большой проходит за $2t$.

Обозначения. t_0 — температура комнаты (в условии не дана, берём $t_0 = 20\,^\circ\text{C}$); $\theta = t - t_0$ — превышение температуры куба над комнатной; α — коэффициент теплоотдачи (мощность с квадратного метра на градус разности); c — удельная теплоёмкость алюминия, ρ — его плотность; индексы 1 и 2 — малый и большой куб.

1. Теплоёмкость и площадь открытых граней. Нижняя грань лежит на столе, остальные пять открыты (рисунок 2):

$$S_1 = 5a^2, \quad S_2 = 5(2a)^2 = 20a^2; \qquad C_1 = c\rho a^3, \quad C_2 = c\rho(2a)^3 = 8c\rho a^3.$$



$S_1 = 5a^2$ $S_2 = 20a^2$

Развёртки открытых граней: у малого куба пять граней по a^2, у большого — пять граней по $4a^2$ (каждая — четыре клетки $a \times a$).

2. Закон сохранения энергии для куба за малое время $\Delta\tau$. Теплота, ушедшая в воздух, равна убыли внутренней энергии куба:

$$C\,\Delta\theta = -\alpha S\,\theta\,\Delta\tau \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\theta}{\theta} = -\frac{\alpha S}{C}\Delta\tau.$$

Доля, на которую уменьшается превышение θ за единицу времени, определяется отношением

$$\frac{S_1}{C_1} = \frac{5}{c\rho a}, \qquad \frac{S_2}{C_2} = \frac{20a^2}{8c\rho a^3} = \frac{2{,}5}{c\rho a} = \frac{1}{2}\,\frac{S_1}{C_1}.$$

Знак минус: превышение со временем уменьшается.

3. Главное свойство такого остывания. Раз за малый промежуток превышение уменьшается на одну и ту же *долю*, за любые равные промежутки времени оно умножается на одно и то же число. Значит, у большого куба за время 2τ превышение уменьшается во столько же раз, во сколько у малого за τ. Обозначим через τ время, за которое малый куб

остыл до 120 °C. Его превышение уменьшилось в

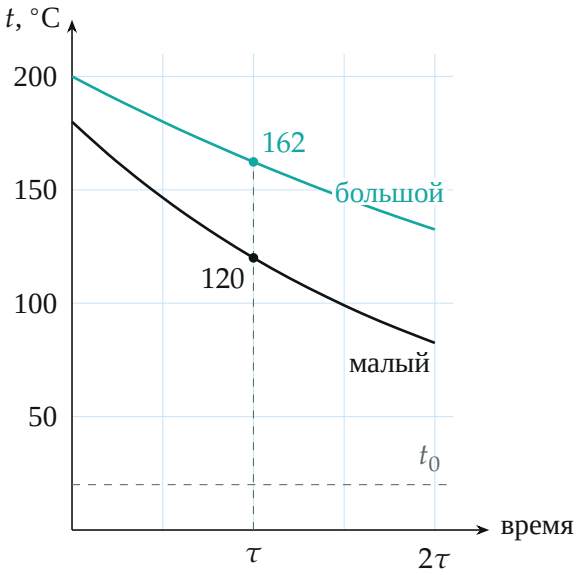
$$k = \frac{\theta_1(0)}{\theta_1(\tau)} = \frac{180-20}{120-20} = 1{,}6 \text{ раза.}$$

Большому кубу нужно время 2τ, чтобы уменьшить превышение в k раз. За время τ (половину этого срока) оно уменьшается в $\sqrt{k}$ раз: две одинаковые половины дают множитель $\sqrt{k} \cdot \sqrt{k} = k$.

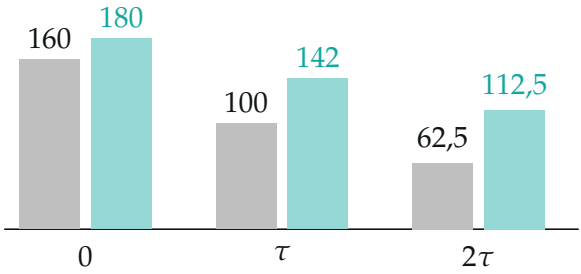
4. Температура большого куба.

$$\theta_2(\tau) = \frac{\theta_2(0)}{\sqrt{k}} = (200-20)\sqrt{\frac{120-20}{180-20}}\,^\circ\text{C} \approx 142{,}3\,^\circ\text{C},$$

$$t_2 = t_0 + (200-t_0)\sqrt{\frac{120-t_0}{180-t_0}} \approx 20 + 142 \approx 162\,^\circ\text{C}.$$



Температуры кубов от времени при $t_0 = 20\,^\circ C$, посчитаны по закону Ньютона: в момент τ, когда малый куб остыл до $120\,^\circ C$, большой имеет $\approx 162\,^\circ C$.



Превышение температуры над комнатной (в градусах) в моменты 0, τ, 2τ: серые столбики — малый куб (каждый раз делится на $k = 1{,}6$), бирюзовые — большой (делится на $\sqrt{k} \approx 1{,}26$).

Обратите внимание. Мощности теплопотерь кубов не равны: большой куб отдаёт тепло через вчетверо большую площадь. Медленнее он остывает не потому, что теряет меньше, а потому, что его запас тепла в 8 раз больше. У организаторов в ответе 185 °C: они приравняли мощности теплопотерь кубов и не учли разницу теплоёмкостей — такой ответ не получается ни при какой температуре комнаты.

Ответ: $t_2 = t_0 + (200\,^\circ\text{C} - t_0)\sqrt{\dfrac{120\,^\circ\text{C} - t_0}{180\,^\circ\text{C} - t_0}} \approx 162\,^\circ\text{C}$ при $t_0 = 20\,^\circ\text{C}$.

Проверка. Второй способ — численно (python): шагами по 10^{-5} условного времени уменьшаем θ_1 на $5\theta_1\Delta\tau$ и θ_2 на $2{,}5\theta_2\Delta\tau$ до $t_1 = 120\,^\circ\text{C}$ — получаем $t_2 = 162{,}3\,^\circ\text{C}$. Зависимость от неизвестной t_0 слабая: при $t_0 = 0$ и $30\,^\circ\text{C}$ получается 163 и 162 °C. Большой куб за то же время остыл на 38 градусов, малый — на 60: медленнее, как и должно быть.

Ответ. $t_2 \approx 162\,^\circ\text{C}$ (при температуре комнаты 20 °C; в общем виде $t_2 = t_0 + (200\,^\circ\text{C} - t_0)\sqrt{\frac{120\,^\circ\text{C}-t_0}{180\,^\circ\text{C}-t_0}}$).