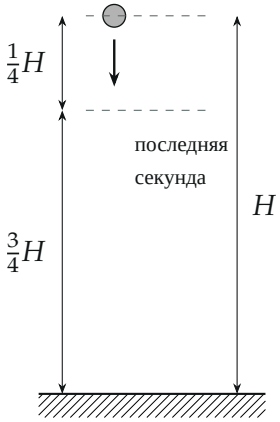
Последняя секунда падения

Задача 1. [Курчатов 2017/18, 9 класс, задача 1] Тело свободно падает без начальной скорости с некоторой высоты H и за последнюю секунду своего падения проходит путь в 3 раза больший, чем за всё остальное время падения. Вычислите высоту H. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2, сопротивление воздуха не учитывайте.



Поясняющий рисунок: за последнюю секунду тело проходит втрое больше, чем до неё, — значит, $\frac{3}{4}H$ из всей высоты.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равноускоренное движение без начальной скорости. Путь растёт как квадрат времени, поэтому в конце падения тело проходит за секунду гораздо больше, чем в начале. Условие «за последнюю секунду втрое больше, чем за всё остальное время» сразу делит высоту на части $\frac{1}{4}H$ и $\frac{3}{4}H$; остаётся найти время падения.

Обозначения. t — полное время падения; $\tau = 1$ с — последняя секунда; ось y — вертикально вниз от точки старта.

1. Как делится высота. Пусть до последней секунды пройден путь s, тогда за последнюю — $3s$, всего $H = 4s$:

$$s = \frac{1}{4}H, \qquad 3s = \frac{3}{4}H.$$

2. Закон равноускоренного движения $y = gt^2/2$ для двух моментов. Тело начинает падать из покоя с ускорением g вниз (сопротивления нет):

$$H = \frac{gt^2}{2}, \qquad \frac{1}{4}H = \frac{g(t-\tau)^2}{2}.$$

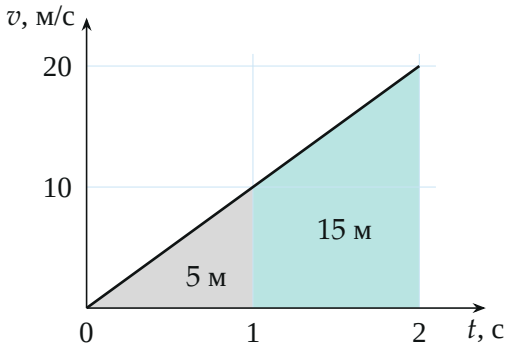
Разделим первое уравнение на второе:

$$4 = \frac{t^2}{(t-\tau)^2} \quad \Rightarrow \quad t = 2(t-\tau) \quad \Rightarrow \quad t = 2\tau = 2\text{ с}.$$

Корень квадратный берём положительный: $t > \tau$, иначе «последней секунды» нет. (Второй корень $t = \frac{2}{3}\tau$ меньше секунды и не подходит.)

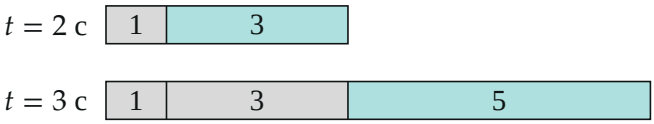
3. Высота.

$$H = \frac{gt^2}{2} = \frac{10 \cdot 2^2}{2} = 20\text{ м}.$$



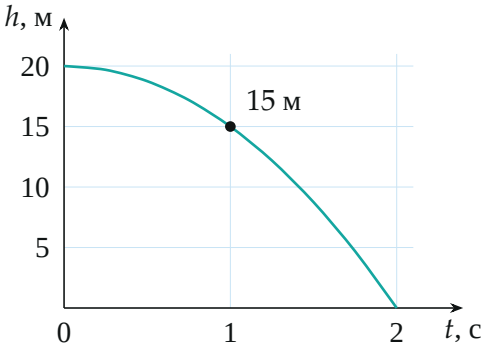
Скорость $v = gt$. Путь — площадь под графиком: за первую секунду треугольник 5 м, за вторую (последнюю) — трапеция 15 м, ровно втрое больше.

4. Второй способ: правило нечётных чисел. При падении из покоя пути за последовательные равные промежутки времени относятся как $1 : 3 : 5 : \ldots$ (площади под графиком $v(t)$ — треугольник, затем трапеции; рисунок 2). Отношение «последняя секунда : всё остальное» $= 3 : 1$ получается, только если всё падение состоит из двух секунд: первая — 1 часть, последняя — 3 части. При 3 секундах было бы $5 : (1 + 3) = 5 : 4$ — рисунок 3.



Пути за последовательные секунды (в единицах $g\tau^2/2 = 5$ м); бирюзовый — последняя секунда. Отношение $3:1$ — только при $t = 2$ с.

5. Как тело движется. Высота над землёй $h(t) = H - gt^2/2$ (рисунок 4): за первую секунду тело опускается с 20 до 15 м, за вторую — с 15 до 0 м.



Высота тела над землёй, $h = 20 - 5t^2$ (м); точка — начало последней секунды.

Обратите внимание. «Путь в 3 раза больший, чем за всё остальное время» — это $\frac{3}{4}H$ за последнюю секунду, а не $3H$ и не $\frac{1}{3}H$: сравниваются две части одной высоты.

Ответ:

$$t = 2\tau = 2\text{ с}, \qquad H = \frac{g(2\tau)^2}{2} = 2g\tau^2 = 20\text{ м}.$$

Проверка. Размерность: $g\tau^2$ — метры. Подстановка: за первую секунду $5 \cdot 1^2 = 5$ м, за две — 20 м, за последнюю — 15 м; $15 = 3 \cdot 5$ — условие выполнено.

Ответ. $H = 2g\tau^2 = 20$ м.