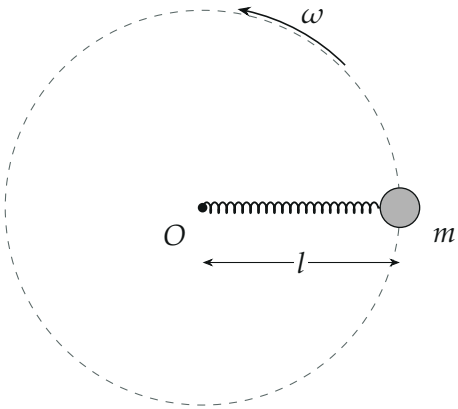
Груз на упругом жгуте

Задача 2. [Курчатов 2017/18, 9 класс, задача 2] Один конец лёгкого упругого жгута закреплён, а к другому привязан груз массой $m = 2$ кг, который движется в горизонтальной плоскости по окружности вокруг закреплённого конца жгута, совершая 90 оборотов в минуту. Коэффициент жёсткости жгута $k = 700$ Н/м, его длина в недеформированном состоянии 1 см.

1. Рассчитайте угловую скорость ω груза.
2. Найдите длину жгута l.



Поясняющий рисунок, вид сверху: груз на жгуте обходит окружность радиуса l вокруг закреплённого конца O.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на движение по окружности под действием силы упругости. Жгут — единственное, что тянет груз к центру, его сила упругости и создаёт центростремительное ускорение. Но длина жгута (радиус окружности) сама зависит от силы: чем быстрее вращение, тем сильнее растянут жгут. Поэтому длину находим из уравнения, где l стоит с обеих сторон: в законе Гука и в $\omega^2 l$.

Обозначения. $\nu = 90$ об/мин — частота обращения; $l_0 = 1$ см — длина недеформированного жгута; l — длина растянутого жгута (радиус окружности); ось r — вдоль жгута к центру O.

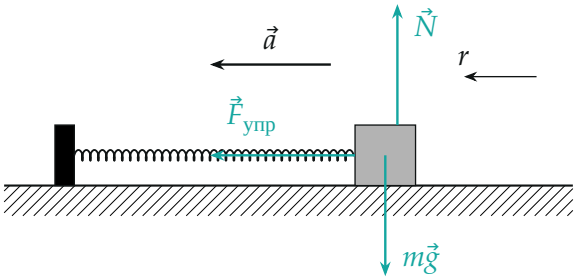
Пункт 1.

1. Угловая скорость. Переведём частоту в обороты в секунду: $\nu = 90/60 = 1{,}5\ \text{с}^{-1}$. За один оборот угол 2π:

$$\omega = 2\pi\nu = 3\pi \approx 9{,}4\ \text{рад/с}.$$

Пункт 2.

2. Силы. В горизонтальной плоскости на груз действует только сила упругости жгута $F_{\text{упр}} = k(l - l_0)$, направленная к O. Сила тяжести вертикальна; в задаче о движении «в горизонтальной плоскости» её уравновешивает опора (груз скользит по гладкому столу) — на рисунке 2 вид сбоку.



Вид сбоку: сила упругости $\vec{F}_{упр}$ направлена к центру и сообщает грузу центростремительное ускорение $\vec{a}$; $m\vec{g}$ и $\vec{N}$ уравновешены.

3. Второй закон Ньютона в проекции на ось r. Груз равномерно движется по окружности радиуса l, его ускорение направлено к центру и равно $\omega^2 l$; закон Гука даёт силу:

$$m\omega^2 l = k(l - l_0).$$

Неизвестное l — в обеих частях; соберём его слева:

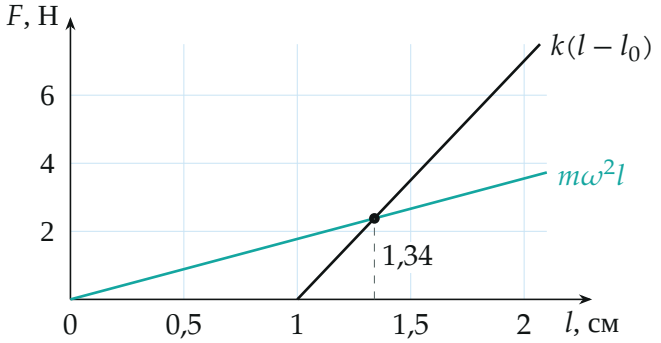
$$l\,(k - m\omega^2) = kl_0 \quad \Rightarrow \quad l = \frac{k\,l_0}{k - m\omega^2}.$$

4. Числа.

$$m\omega^2 = 2 \cdot 9{,}42^2 \approx 177{,}7\ \text{Н/м}, \qquad l = \frac{700 \cdot 1\ \text{см}}{700 - 177{,}7} \approx 1{,}34\ \text{см}.$$

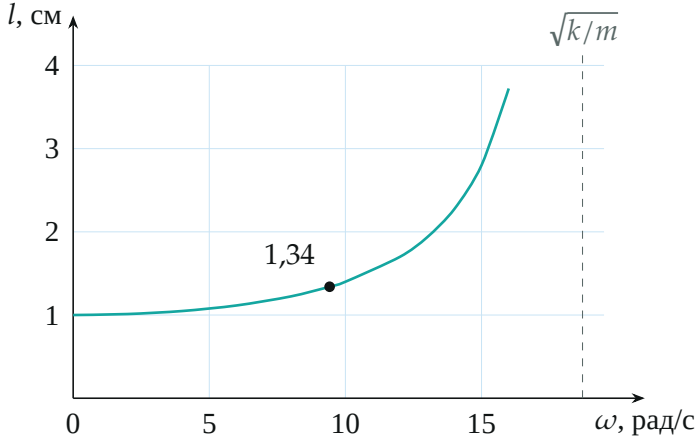
Жгут растянут на 3,4 мм, сила упругости $k(l - l_0) \approx 2{,}4$ Н.

5. Второй способ: графически. Нарисуем зависимость от l двух сил: той, что даёт жгут, $k(l - l_0)$, и той, что нужна для движения по окружности, $m\omega^2 l$ (рисунок 3). Груз устойчиво вращается там, где они равны, — в точке пересечения прямых.



Сила упругости жгута (чёрная прямая) и нужная центростремительная сила при $\omega = 3\pi$ рад/с (бирюзовая); пересечение даёт $l \approx 1{,}34$ см, $F \approx 2{,}4$ Н.

6. Если раскручивать быстрее. Формула $l = kl_0/(k - m\omega^2)$ показывает: при $\omega \to \sqrt{k/m} \approx 18{,}7$ рад/с знаменатель обращается в нуль, и жгут растягивается неограниченно (рисунок 4) — прямая $m\omega^2 l$ становится параллельной $k(l - l_0)$ и не пересекает её.



Длина жгута в зависимости от угловой скорости; точка — условие задачи, пунктир — $\omega = \sqrt{k/m}$, где длина неограниченно растёт.

Обратите внимание. В ускорение входит растянутая длина l, а не l_0: радиус окружности — это фактическая длина жгута. Если подставить l_0, получится $l = l_0 + m\omega^2 l_0/k \approx 1{,}25$ см — ошибка около 6 %.

Ответ:

$$\omega = 2\pi\nu \approx 9{,}4 \text{ рад/с}, \qquad l = \frac{kl_0}{k - m\omega^2} \approx 1{,}34 \text{ см}.$$

Проверка. Размерность: $m\omega^2$ — кг/с^2 = Н/м, как и k, дробь безразмерна, l — в сантиметрах. Предел $\omega \to 0$: $l \to l_0$ — жгут не растянут. Подстановка: $177{,}7 \cdot 0{,}0134 \approx 2{,}38$ Н и $700 \cdot 0{,}0034 = 2{,}38$ Н — совпадает.

Ответ. 1) $\omega = 2\pi\nu = 3\pi \approx 9{,}4$ рад/с; 2) $l = \dfrac{kl_0}{k - m\omega^2} \approx 1{,}34$ см.