Цилиндр в двух жидкостях

Задача 3. [Курчатов 2017/18, 9 класс, задача 3] Сплошной однородный цилиндр из материала с плотностью $\rho = 900$ кг/м^3 плавает в сосуде, заполненном двумя несмешивающимися жидкостями (рис. 1). Плотности жидкостей $\rho_1 = 1000$ кг/м^3 и $\rho_2 = 800$ кг/м^3, верхняя грань цилиндра параллельна уровню жидкости и выступает над ним на $a = 1$ см. Высота цилиндра $h = 12$ см. Найдите толщину x слоя верхней жидкости.

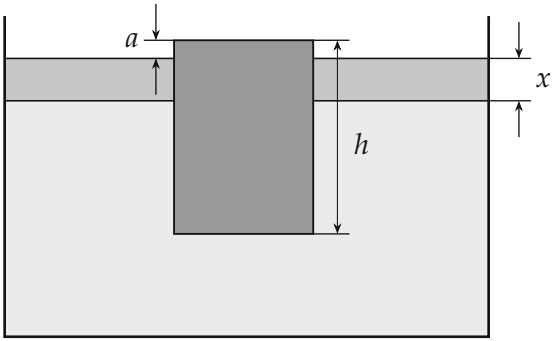


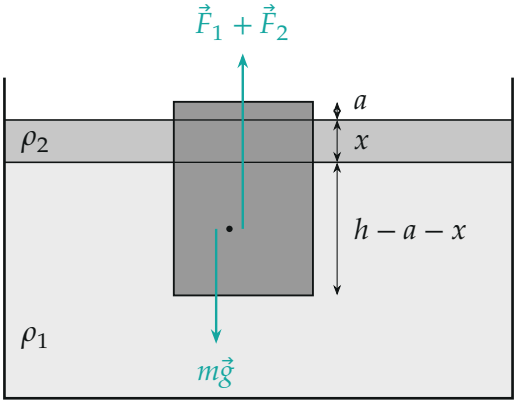
Рис. 1

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на условие плавания тела в двух жидкостях. Сначала — какая жидкость сверху: менее плотная, $\rho_2 = 800$ кг/м^3. Цилиндр погружён в обе: в верхнюю на всю толщину слоя x, в нижнюю — на остаток $h-a-x$. Сила тяжести цилиндра уравновешена суммой двух архимедовых сил. Площадь сечения S одна у всех частей цилиндра и сократится.

Обозначения. S — площадь основания цилиндра; $m = \rho Sh$ — его масса; F_1, F_2 — архимедовы силы со стороны нижней и верхней жидкостей; ось y — вертикально вверх.

1. Как цилиндр разделён жидкостями. Над поверхностью выступает a, в верхнем слое — x, в нижней жидкости — остальное (рисунок 2):

$$h = a + x + (h - a - x).$$



Цилиндр выступает на a, в верхнем слое (плотность ρ_2) на x, в нижней жидкости (ρ_1) на $h-a-x$. Сила тяжести уравновешена суммой архимедовых сил.

2. Закон Архимеда для каждой части. Архимедова сила равна весу вытесненной жидкости:

$$F_2 = \rho_2 g S x, \qquad F_1 = \rho_1 g S\,(h - a - x).$$

3. Условие плавания: первый закон Ньютона в проекции на ось y. Цилиндр покоится:

$$\rho g S h = \rho_1 g S\,(h - a - x) + \rho_2 g S x.$$

Сократим на gS и соберём x:

$$x\,(\rho_1 - \rho_2) = (\rho_1 - \rho)h - \rho_1 a \quad \Rightarrow \quad x = \frac{(\rho_1 - \rho)h - \rho_1 a}{\rho_1 - \rho_2}.$$

4. Числа.

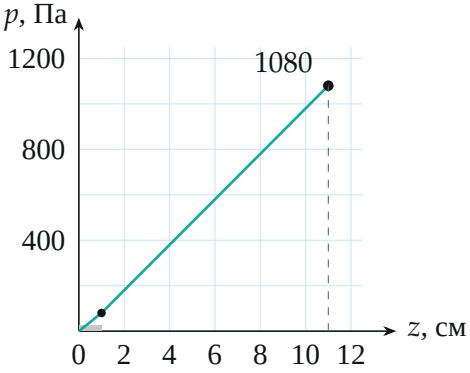
$$x = \frac{(1000 - 900)\cdot 12 - 1000\cdot 1}{1000 - 800}\ \text{см} = \frac{1200 - 1000}{200}\ \text{см} = 1\ \text{см}.$$

5. Второй способ: давление под цилиндром. Сила Архимеда — это разность сил давления снизу и сверху. Сверху на цилиндр давит только воздух (как и на поверхность жидкости), поэтому избыточное давле-

ние под дном цилиндра p уравновешивает его вес: $pS = \rho g S h$. Дно на глубине $h - a$ под поверхностью, давление складывается из двух слоёв (рисунок 3):

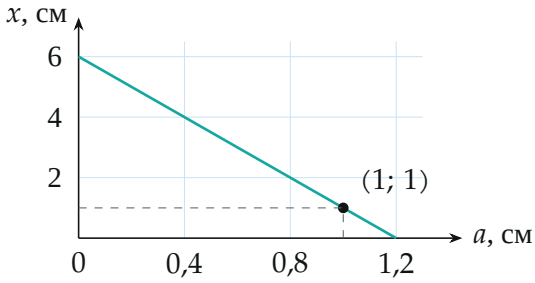
$$p = \rho_2 g x + \rho_1 g\,(h - a - x) = \rho g h.$$

Это то же уравнение. Числа: $\rho g h = 900 \cdot 10 \cdot 0{,}12 = 1080$ Па $= 80 + 1000$ Па — слой ρ_2 толщиной 1 см даёт 80 Па, вода на 10 см — 1000 Па.



Избыточное давление на глубине z под поверхностью: в слое ρ_2 (серая полоска, 1 см) растёт медленнее, в ρ_1 — быстрее. Дно цилиндра на глубине $h - a = 11$ см, там $p = \rho g h = 1080$ Па.

6. Как толщина слоя зависит от выступа. Из шага 3 при данных плотностях $x = 6$ см $- 5a$ (рисунок 4): чем меньше выступает цилиндр, тем толще слой лёгкой жидкости, которая «недодаёт» выталкивающей силы. При $a = 1{,}2$ см слоя нет — цилиндр плавает в одной воде ($\rho/\rho_1 = 0{,}9$, погружено $0{,}9h$).



Толщина верхнего слоя в зависимости от выступа цилиндра, $x = 6 - 5a$ (см); точка — условие задачи.

Обратите внимание. Верхняя часть цилиндра, выступающая над жидкостью, архимедовой силы не даёт, а слой ρ_2 вытесняется на всю его толщину x — цилиндр проходит сквозь слой целиком.

Ответ:

$$x = \frac{(\rho_1 - \rho)h - \rho_1 a}{\rho_1 - \rho_2} = 1 \text{ см}.$$

Проверка. Размерность: отношение плотностей безразмерно, x — в сантиметрах. Предел $\rho_2 = \rho_1$ (одна жидкость): уравнение даёт $(\rho_1 - \rho)h = \rho_1 a$, то есть $a = (1 - \rho/\rho_1)h = 1{,}2$ см — обычное плавание. Подстановка: $800 \cdot 1 + 1000 \cdot 10 = 10\,800 = 900 \cdot 12$ — верно.

Ответ. $x = \dfrac{(\rho_1 - \rho)h - \rho_1 a}{\rho_1 - \rho_2} = 1$ см.