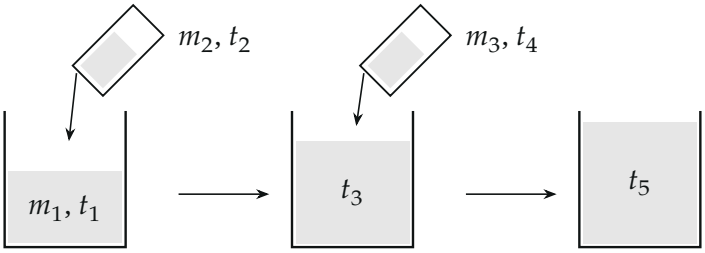
Смешивание воды в калориметре

Задача 4. [Курчатов 2017/18, 9 класс, задача 4] В калориметре смешали $m_1 = 100$ г воды, имеющей температуру $t_1 = 20$ °C, и $m_2 = 50$ г воды, имеющей температуру $t_2 = 50$ °C. Найдите температуру t_3 смеси. Сколько ещё воды, взятой при температуре $t_4 = 60$ °C нужно долить в калориметр, чтобы в нём установилась температура $t_5 = 40$ °C? Потерями тепла можно пренебречь.



Поясняющий рисунок: два этапа смешивания в калориметре.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на уравнение теплового баланса. Калориметр не отдаёт тепло наружу (потерь нет, теплоёмкостью сосуда пренебрегаем, раз она не дана), поэтому всё тепло, отданное горячей водой, получает холодная. Вода одна и та же, удельная теплоёмкость c у всех порций одинакова и сократится: температура смеси — среднее температур, взвешенное по массам.

Обозначения. c — удельная теплоёмкость воды; m_3 — масса доливаемой воды; Q — количество теплоты.

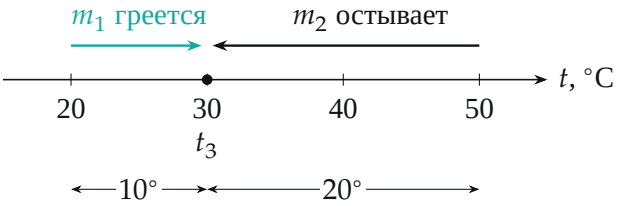
Этап 1. Температура смеси.

1. Уравнение теплового баланса. Холодная вода (m_1) нагревается от t_1 до t_3, горячая (m_2) остывает от t_2 до t_3; полученное тепло равно отданному:

$$cm_1(t_3 - t_1) = cm_2(t_2 - t_3).$$

$$t_3 = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2} = \frac{100 \cdot 20 + 50 \cdot 50}{150} = 30\ ^\circ\text{C}.$$

2. Как это выглядит на шкале температур. Из уравнения баланса $\frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_3} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{2}$: температура смеси делит отрезок $[t_1; t_2]$ в отношении, обратном массам, — ближе к той порции, которой больше (рисунок 2).



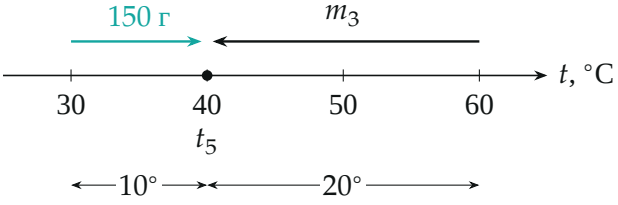
Этап 1: 100 *г нагреваются на* 10°, 50 *г остывают на* 20°; *произведения масс на изменения температуры равны* (1000 *г*·°*C*).

Этап 2. Сколько долить.

3. Уравнение теплового баланса. Теперь «холодная» порция — вся смесь массой $m_1 + m_2 = 150$ г при $t_3 = 30$ °C, она нагревается до t_5; доливаемая вода остывает от t_4 до t_5:

$$c\,(m_1 + m_2)(t_5 - t_3) = cm_3(t_4 - t_5),$$

$$m_3 = (m_1 + m_2)\,\frac{t_5 - t_3}{t_4 - t_5} = 150 \cdot \frac{40 - 30}{60 - 40} = 75 \text{ г}.$$



Этап 2: смесь 150 *г нагревается на* 10°, *доливаемая вода остывает на* 20° *— её должно быть вдвое меньше,* 75 *г.*

4. Второй способ: всё сразу. Тот же итог даёт один баланс для трёх порций, без промежуточной температуры: при конечной температуре t_5

первая порция нагрелась, вторая и третья остыли:

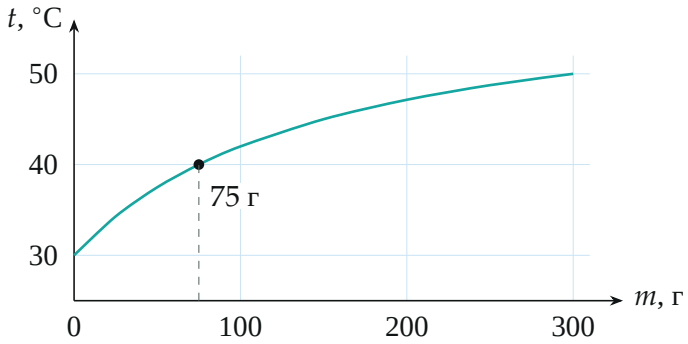
$$m_1(t_5 - t_1) = m_2(t_2 - t_5) + m_3(t_4 - t_5),$$

$$100 \cdot 20 = 50 \cdot 10 + m_3 \cdot 20, \quad m_3 = 75 \text{ г}.$$

5. Как температура зависит от количества долитой воды. По уравнению баланса для смеси и m граммов долитой воды (рисунок 4)

$$t(m) = \frac{150 \cdot 30 + 60\,m}{150 + m}\ ^\circ\text{C}.$$

При большом m температура стремится к 60 °C, но не достигает её.



Температура в калориметре в зависимости от массы долитой воды при 60 °C; точка — 40 °C при 75 г.

Обратите внимание. Во втором этапе греется вся смесь (150 г), а не только первая порция: к моменту доливания вода в калориметре уже имеет общую температуру 30 °C.

Ответ:

$$t_3 = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2} = 30\ ^\circ\text{C},$$

$$m_3 = (m_1 + m_2)\,\frac{t_5 - t_3}{t_4 - t_5} = 75 \text{ г}.$$

Проверка. Размерность: отношение разностей температур безразмерно, m_3 — в граммах. Подстановка: $t = (150 \cdot 30 + 75 \cdot 60)/225 =$

$9000/225 = 40$ °C — верно. t_3 лежит между t_1 и t_2, t_5 — между t_3 и t_4, как и должно быть при смешивании.

Ответ. $t_3 = 30$ °C; $m_3 = 75$ г.